PROBLEMAS DE AMES, GRUPO 2, CURSO 2021-2022. HOJA 1.

1. Resolver las siguientes cuestiones.

a) Determinar los números complejos cuyo cuadrado sea igual a su conjugado.
b) Encontrar los números complejos cuyo conjugado coincide con su inverso.
c) Hallar los números complejos que son iguales al cuadrado de su conjugado.
d) Encontrar los números complejos cuyo cuadrado coincide con el cuadrado de su conjugado.

2. Si $z \neq 0$ es un número complejo, probar que z, $1/\overline{z}$, 0 están alineados.

3. Hallar los valores de n naturales para los que $(1+i)^n$ es un número real positivo.

4. Hallar las raíces sextas de $7+13i$.

5. Sean $w_0, ..., w_{n-1}$ las n raíces n-ésimas de 1. Demostrar que:

a) $\Pi_{k=0}^{n-1}(z-w_k) = z^n - 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$;
b) $\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0$;
c) $\Pi_{k=0}^{n-1} w_k = (-1)^{n-1}$;
d) $\sum_{j=0}^{n-1} w_j^k = \begin{cases} 0, \text{ si } 1 \leq k \leq n-1 \\ n, \text{ si } k = n. \end{cases}$

6. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ y tal que $|z| = 1$. Probar que $z + z^{-1}$ es real y que $\frac{1+z}{1-z}$ es imaginario puro.

7. Justificar que las funciones e^z, $\cos z$, $\operatorname{sen} z$ son continuas en $\mathbb{C}$.

8. Probar que la sucesión de funciones

$$f_n(z) = \frac{n+e^z}{1+n|z|^2}$$

converge uniformemente en cada conjunto $E_R = \{z \in \mathbb{C} : 1/R \leq |z| \leq R\}$ con $R > 0$. Comprobar también que converge puntualmente en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

9. Recordemos que hemos definido, para cada $z = x+iy \in \mathbb{C}$, $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$. Utilizar las ecuaciones de Cauchy-Riemman para demostrar que $f(z) = e^z$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, y que $f'(z) = e^z$.

10. Deducir del ejercicio anterior que las siguientes funciones son holomorfas, y calcular sus derivadas:

a) $\operatorname{sen} z := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$
b) $\cos z := \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$
c) $\operatorname{senh} z := \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$
d) $\cosh z := \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$.

11. Demostrar que si $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en un abierto conexo Ω de $\mathbb{C}$ y $f' = 0$ en Ω, entonces f es constante en Ω.

12. Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$. Demostrar que si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa y sólo toma valores reales (es decir $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$) entonces f es constante.

13. Demostrar que si tanto $f = u+iv$ como $\overline{f} := u - iv$ son holomorfas en un abierto conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ entonces f es constante.

14. Demostrar que si f es holomorfa en un abierto conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y además $|f|$ es constante, entonces f es constante.
Indicación: $\overline{f} = |f|^2/f$.

15. Comprobar que si $f = u + iv$ es holomorfa entonces $|f'| = \|\nabla u\| = \|\nabla v\|$.

16. Comprobar que si $f = u + iv$ es holomorfa entonces ∇v se obtiene rotando $\pi/2$ el vector ∇u. Recíprocamente, si $\nabla v = e^{i\pi/2}\nabla u$ y $f = (u, v)$ es diferenciable en sentido real entonces f es holomorfa.

17. Demostrar que en coordenadas polares las ecuaciones de Cauchy-Riemann se expresan:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}.$$

18. Comprobar que, para cada $m \in \mathbb{Z}$, las funciones u, v definidas en coordenadas polares por $u(re^{i\theta}) = r^m \cos(m\theta)$, $v(re^{i\theta}) = r^m \operatorname{sen}(m\theta)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

19. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa e inyectiva, con derivada f' continua y tal que $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Demostrar que

$$\text{área}(f(\Omega)) = \int_\Omega |f'(z)|^2 dxdy.$$

20. Consideremos la función $f(z) = z^2$, y los recintos $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ y E= $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 1\}$. Dibujar los conjuntos $f(D)$ y $f(E)$, y calcular sus áreas.

Se dice que una función $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es *armónica* si es solución de la *ecuación de Laplace*:

$$\Delta u = 0,$$

donde

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2}$$

y entendemos que u es por lo menos de clase C^2.

21. Demostrar que si $u + iv = f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa y $u, v \in C^2(\Omega)$ entonces u y v son armónicas.

Si u es armónica en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y v es armónica en Ω y cumple que $u + iv$ es holomorfa en Ω, se dice que v es una *conjugada armónica de* u.

22. Demostrar que la conjugada armónica, si existe en un abierto conexo Ω de $\mathbb{C}$, es única salvo una constante aditiva.

23. Comprobar que $u(x, y) = xy$ es armónica en $\mathbb{R}^2$, y hallar una conjugada armónica de u.

24. Generalizar la estrategia de la solución del ejercicio anterior para demostrar que si Ω es un disco abierto, o un rectángulo abierto con lados paralelos a los ejes, y $u(x, y)$ es armónica en Ω, entonces existe v conjugada armónica de u en Ω, y que v es de la forma

$$v(x, y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)dt - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(s, y_0)ds + C.$$

25. Sea f holomorfa con derivada continua en $D(0, 2)$, y supongamos que f es inyectiva en $\overline{D}(0, 1)$, y que $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{D}(0, 1)$. Demostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que f es inyectiva en $D(0, 1 + \varepsilon)$.