

**PROBLEMAS DE ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA.  
HOJA 1.**

1. Sean  $z, w \in \mathbb{C}$  tales que  $\bar{z}w \neq 1$ . Demostrar que

$$\left| \frac{w - z}{1 - \bar{w}z} \right| < 1 \text{ si } |z| < 1 \text{ y } |w| < 1,$$

y que

$$\left| \frac{w - z}{1 - \bar{w}z} \right| = 1 \text{ si } |z| = 1 \text{ o } |w| = 1.$$

Indicación: puede suponerse  $z \in \mathbb{R}$  (¿por qué?), y entonces basta ver que

$$(r - w)(r - \bar{w}) \leq (1 - rw)(1 - r\bar{w}),$$

con igualdad en los casos apropiados.

2. Demostrar que para  $w \in \mathbb{D}$  fijo, la aplicación

$$F(z) = \frac{w - z}{1 - \bar{w}z}$$

tiene las siguientes propiedades:

- a)  $F(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ ;
- b)  $F(0) = w$  y  $F(w) = 0$ ;
- c)  $|F(z)| = 1$  si  $|z| = 1$ ;
- d)  $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  es biyectiva.

3. Demostrar que la proyección estereográfica lleva circunferencias de la esfera  $\mathbb{S}^2$  que no contienen al polo norte  $N = (0, 0, 1)$  en circunferencias de  $\mathbb{C}$ . Demostrar también que si  $K$  es una circunferencia de  $\mathbb{S}^2$  que contiene a  $N$  entonces dicha proyección lleva  $K$  en  $L \cup \{\infty\}$ , donde  $L$  es una recta de  $\mathbb{C}$ .

4. Consideremos la función  $f(z) = 1/z$ , y sea  $L = \{x + iy : Cx + Dy = E\}$  una recta de  $\mathbb{C}$ . Demostrar que  $f(L)$  es un círculo de  $\mathbb{C}$  si  $E \neq 0$ , y es una recta de  $\mathbb{C}$  si  $E = 0$ . Interpretar estos resultados considerando que  $f$  esté definida de  $\mathbb{C}^*$  en  $\mathbb{C}^*$  (con  $f(0) = \infty$  y  $f(\infty) = 0$ ).

5. Probar que si  $e^{z+w} = e^z$  para todo  $z \in \mathbb{C}$  entonces  $w = 2k\pi i$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ .

6. Recordemos que hemos definido, para cada  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ,  $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ . Utilizar las ecuaciones de Cauchy-Riemann para demostrar que  $f(z) = e^z$  es holomorfa en  $\mathbb{C}$ , y que  $f'(z) = e^z$ .

7. Deducir del ejercicio anterior que las siguientes funciones son holomorfas, y calcular sus derivadas:

- a)  $\operatorname{sen} z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
- b)  $\operatorname{cos} z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
- c)  $\operatorname{senh} z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$
- d)  $\operatorname{cosh} z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ .

8. Demostrar que si  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en un abierto conexo  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  y  $f' = 0$  en  $\Omega$ , entonces  $f$  es constante en  $\Omega$ .

9. Sea  $\Omega$  un abierto conexo de  $\mathbb{C}$ . Demostrar que si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa y sólo toma valores reales (es decir  $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ ) entonces  $f$  es constante.

**10.** Demostrar que si tanto  $f = u + iv$  como  $\bar{f} := u - iv$  son holomorfas en un abierto conexo  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  entonces  $f$  es constante.

**11.** Demostrar que si  $f$  es holomorfa en un abierto conexo  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  y además  $|f|$  es constante, entonces  $f$  es constante.

Indicación:  $\bar{f} = |f|^2/f$ .

**12.** Comprobar que si  $f = u + iv$  es holomorfa entonces  $|f'| = \|\nabla u\| = \|\nabla v\|$ .

**13.** Comprobar que si  $f = u + iv$  es holomorfa entonces  $\nabla v$  se obtiene rotando  $\pi/2$  el vector  $\nabla u$ . Recíprocamente, si  $\nabla v = e^{i\pi/2}\nabla u$  y  $f = (u, v)$  es diferenciable en sentido real entonces  $f$  es holomorfa.

**14.** Demostrar que en coordenadas polares las ecuaciones de Cauchy-Riemann se expresan:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}.$$

**15.** Comprobar que, para cada  $m \in \mathbb{Z}$ , las funciones  $u, v$  definidas en coordenadas polares por  $u(re^{i\theta}) = r^m \cos(m\theta)$ ,  $v(re^{i\theta}) = r^m \sin(m\theta)$  satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

**16.** Demostrar que las funciones

$$\operatorname{arcsenz} = -i \log(iz \pm \sqrt{1 - z^2}),$$

definidas para  $z \in \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$ , son derivables, y calcular su derivada.

**17.** Sea  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa e inyectiva, con derivada  $f'$  continua. Demostrar que

$$\text{área}(f(\Omega)) = \int_{\Omega} |f'(z)|^2 dx dy.$$

**18.** Consideremos la función  $f(z) = z^2$ , y los recintos  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ ,  $E = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 1\}$ . Dibujar los conjuntos  $f(D)$  y  $f(E)$ , y calcular sus áreas.

Se dice que una función  $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es *armónica* si es solución de la *ecuación de Laplace*:

$$\Delta u = 0,$$

donde

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

y entendemos que  $u$  es por lo menos de clase  $C^2$ .

**19.** Demostrar que si  $u + iv = f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa y  $u, v \in C^2(\Omega)$  entonces  $u$  y  $v$  son armónicas.

Si  $u$  es armónica en  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  y  $v$  es armónica en  $\Omega$  y cumple que  $u + iv$  es holomorfa en  $\Omega$ , se dice que  $v$  es una *conjugada armónica de  $u$* .

**20.** Demostrar que la conjugada armónica, si existe, es única salvo una constante aditiva.

**21.** Comprobar que  $u(x, y) = xy$  es armónica en  $\mathbb{R}^2$ , y hallar una conjugada armónica de  $u$ .

**22.** Generalizar la estrategia de la solución del ejercicio anterior para demostrar que si  $\Omega$  es un disco abierto, o un rectángulo abierto con lados paralelos a los ejes, y  $u(x, y)$  es armónica en  $\Omega$ , entonces existe  $v$  conjugada armónica de  $u$  en  $\Omega$ , y que  $v$  es de la forma

$$v(x, y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt - \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(s, y_0) ds + C.$$