**PROBLEMAS DE ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA. HOJA 2.**

**1.** Comprobar que la ecuación de Laplace en coordenadas polares es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

**2.** Usando el ejercicio anterior, comprobar que $\log|z|$ es armónica en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, pero no tiene ninguna conjugada armónica en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

**3.** Demostrar que si $z, w \in \mathbb{C}$ y la función $(-\pi,\pi] \ni \theta \mapsto \mathrm{Arg}(z+we^{i\theta})$ es constante, entonces $w=0$.

**4.** Hallar una aplicación conforme de la banda horizontal $\{z\in\mathbb{C} : -\alpha < \mathrm{Im} z < \alpha\}$ en el semiplano de la derecha $\{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > 0\}$.

**5.** Sea $f = u + iv$ una función de clase $C^1(\Omega)$ tal que $\det Df(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$, y supongamos que $f$ lleva curvas ortogonales en curvas ortogonales. Demostrar que o bien $f$ o bien $\overline{f}$ es holomorfa.

**6.** Sean $\{a_n\}_{n=1}^N$ y $\{b_n\}_{n=1}^N$ dos sucesiones finitas de números complejos. Pongamos $B_0 = 0$ y $B_k = \sum_{n=1}^k b_n$ para $k = 1, 2, ..., N$. Demostrar la *fórmula de suma por partes*:

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1}(a_{n+1}-a_n)B_n.$$

**7.** Demostrar el teorema de Abel: si $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge entonces

$$\lim_{r\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Indicación: usar el ejercicio anterior.

**8.** Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

a) $\sum_{n=1}^\infty (\log n)^2 z^n$;
b) $\sum_{n=1}^\infty n! z^n$;
c) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2}{4^n+3n}(z-6)^n$;
d) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n$ (usar la fórmula de Stirling);
e) $\sum_{n=1}^\infty 2^n (z-3i)^n$;
f) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^n}{1+2^n n^n} z^n$;
g) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{6} z^n$;
h) $\sum_{n=1}^\infty (2+(-1)^n)^n z^n$.

**9.** Sea $f(z) = \sum_{a_n z^n}$ una serie de potencias centrada en el origen. Demostrar que para cada $z_0$ en su disco de convergencia $f$ tiene una expansión en serie de potencias centrada en $z_0$.
Indicación: poner $z = z_0 + (z - z_0)$ y usar la fórmula del binomio.

**10.** ¿Qué funciones representan las siguientes series de potencias?

a) $\sum_{n=1}^\infty n z^n$;
b) $\sum_{n=1}^\infty n^2 z^n$.

**11.** Demostrar lo siguiente:

a) La serie de potencias $\sum_{n=1}^\infty n z^n$ no converge en ningún punto de la circunferencia unidad $|z| = 1$.

b) La serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ converge en todo punto de la circunferencia unidad.
c) La serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ converge en todo punto de la circunferencia unidad, excepto en $z = 1$. Indicación: usar suma por partes.

**12.** Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x > 0$, y $f(x) = 0$ si $x \leq 0$. Demostrar que $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, pero $f$ no admite desarrollo en serie de potencias centrado en el origen.

**13.** Supongamos que $f$ y $g$ son funciones holomorfas en un entorno de 0, y denotemos sus representaciones en series de potencias en un disco $D$ centrado en 0 por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \ \ g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Demostrar que:

a) La representación de $f + g$ en serie de potencias en $D$ es $(f + g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n$.
b) La representación de $fg$ en serie de potencias en $D$ es $(fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, donde

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1}b_1 + ... + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n.$$

**14.** Si $g$ es holomorfa en un entorno de 0 y $g(0) \neq 0$, hallar la representación en serie de potencias centrada en 0 de $1/g$ en términos de la de $g$.
Indicación: suponer $g(0) = 1$, escribir $g(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$, y expresar

$$\frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n}$$

como una serie geométrica.

**15.** Calcular las siguientes integrales para una curva de clase $C^1$ a trozos $\Gamma$ que vaya de $-\pi i$ a $\pi i$ en el semiplano derecho.

a) $\int_\Gamma z^4 dz$;
b) $\int_\Gamma e^z dz$;
c) $\int_\Gamma \cos z dz$;
d) $\int_\Gamma \operatorname{senh} z dz$.

**16.** Calcular $\int_C z^n dz$, donde $C$ es cualquier circunferencia centrada en 0 y con orientación positiva.

**17.** Si $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $f(z) = 1/z$, demostrar que $f$ no tiene ninguna primitiva en $\Omega$.

**18.** Sean $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ curvas $C^1$ a trozos tales que el punto final de $\Gamma_j$ es igual al punto inicial de $\Gamma_{j+1}$, y definamos $\Gamma = \Gamma_1 \cup ... \cup \Gamma_n$ (recorrida en el orden natural, es decir, $\Gamma_j$ antes que $\Gamma_{j+1}$). Comprobar que

$$\int_\Gamma f = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_j} f.$$

**19.** Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior, suponiendo ahora que $C$ es cualquier circunferencia que no tenga al origen en su círculo interior.

**20.** Demostrar que si $|a| < r < |b|$ entonces

$$\int_{C_r} \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz = \frac{2\pi i}{a-b},$$

donde $C_r$ es la circunferencia de radio $r$ centrada en 0, con orientación positiva.

**21.** Demostrar que dos primitivas de una misma función en un abierto conexo difieren en una constante.