PROBLEMAS DE ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA. HOJA 3.

1. Demostrar que

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2)dx = \int_0^\infty \cos(x^2)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Indicación: integrar la función e^{-z^2} sobre un sector de circunferencia de radio R y ángulo $\pi/4$, y hacer $R \to \infty$.

2. Demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

3. Calcular las integrales

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx dx, \text{ y } \int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{sen} bx dx, \text{ donde } a > 0.$$

Indicación: integrar la función e^{-Ax}, con $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ sobre un sector de circunferencia apropiado, de ángulo ángulo ω, con $\cos \omega = a/A$.

4. Demostrar que para todo $\xi \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi x^2} e^{2\pi i x \xi} dx = e^{-\pi \xi^2}.$$

5. Supongamos que f es holomorfa con derivada continua en un abierto Ω y que $\Gamma \subset \Omega$ es una curva cerrada simple de clase C^1 a trozos cuyo interior está contenido en Ω. Aplicar el teorema de Green para demostrar que

$$\int_\Gamma f = 0,$$

obteniendo así una versión del teorema de Cauchy válida para curvas más generales (bajo la suposición adicional de que f' sea continua, la cual puede ser obviada puesto que en teoría hemos demostrado que las funciones holomorfas son infinitamente diferenciables en sentido complejo). Después usar esta versión del teorema de Cauchy e imitar la demostración de la fórmula integral de Cauchy para probar que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

para todo z en la región interior a Γ.

6. Sea $P(z) = c_0 + c_1 z + ... + c_n z^n$ un polinomio. Demostrar que

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta = \pi \sum_{j=0}^n |c_j|^2.$$

Demostrar también que

$$\left| \sum_{j,k=0}^n \frac{c_j c_k}{j + k + 1} \right| \leq \pi \sum_{k=0}^n |c_k|^2.$$

Indicación: considerar primero el caso en que los c_j son reales, aplicando el teorema de Cauchy a la función $f(x)^2$ separadamente en la mitad superior y la mitad inferior del disco unidad.

7. Supongamos que f es continua en el disco cerrado $\{z : |z| \leq R\}$ y holomorfa en su interior. Demostrar que

$$\int_{|z|=R} f(z)dz = 0.$$

Indicación: aproximar $f(z)$ uniformemente por $f_r(z) = f(rz)$, $r \to 1^-$.

8. Sean $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $T \subset \Omega$ un triángulo cuya región interior también está contenida en Ω. Supongamos que f es holomorfa en Ω excepto quizás en un punto w en la región interior a T, y que f está acotada en un entorno de w. Probar que

$$\int_T f = 0.$$

9. Calcular las siguientes integrales usando la fórmula integral de Cauchy:

a) $\int_{|z|=2} \frac{z^n}{z-1} dz$, $n \geq 0$
b) $\int_{|z|=1} \frac{z^n}{z-2} dz$, $n \geq 0$
c) $\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{z} dz$
d) $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^m} dz$, $m \in \mathbb{Z}$
e) $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2(z^2-4)e^z}$
f) $\int_{|z-1|=4} \frac{dz}{z(z^2-4)e^z}$

10. Demostrar que si $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es armónica entonces es de clase C^∞.

11. Demostrar que existen abiertos conexos no acotados $\Omega \subset \mathbb{C}$ y funciones holomorfas $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tales que $|f|$ es acotada y f no es constante.

12. Demostrar que la regla de l'Hôpital vale para funciones diferenciables en sentido complejo.

13. Usar la fórmula integral de Cauchy para demostrar la *propiedad del valor medio de las funciones armónicas*, a saber: si $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es armónica y el disco de radio ρ y centro z está contenido en Ω, entonces

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + \rho e^{i\theta}) d\theta.$$

14 (Principio del máximo para funciones holomorfas)**.** Supongamos que Ω es un abierto de $\mathbb{C}$, y que $\Gamma \subset \Omega$ es una curva cerrada simple de clase C^1 a trozos cuyo interior está contenido en Ω. Dado z_0 un punto de la región interior a Γ, usar la versión de la fórmula integral de Cauchy del problema 5 para demostrar que existe una cosntante C tal que

$$|f(z_0)| \leq C \sup\{|f(z)| : z \in \Gamma\}$$

para cualquier función f holomorfa en Ω. Después aplicar esta desigualdad a $f(z)^n$, tomar raíces n-ésimas, y hacer $n \to \infty$ para concluir que puede tomarse $C = 1$. Concluir que si f es holomorfa en Ω, el máximo de $|f|$ en la región interior a Γ se alcanza siempre en su frontera Γ.

15. Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Demostrar que el diámetro de $f(\mathbb{D})$ cumple

$$2|f'(0)| \leq \sup_{z,w \in \mathbb{D}} |f(z) - f(w)|.$$

16. Si f es holomorfa en la banda $-1 < y < 1, x \in \mathbb{R}$ y cumple

$$|f(z)| \leq A(1 + |z|)^\eta$$

para todo z en dicha banda, donde $\eta \in \mathbb{R}$, demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $A_n \geq 0$ tal que

$$|f^{(n)}(x)| \leq A_n(1 + |x|)^\eta$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.