PROBLEMAS DE ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA. HOJA 4.

1. Demostrar que si $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es armónica y acotada entonces es constante.

2. Demostrar que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es entera y no constante entonces $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$.

3. Digamos que una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es doblemente periódica si existen dos períodos $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ de f que no están alineados con 0 (es decir, ω_1, ω_2 son linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$, y se tiene $f(z+\omega_1) = f(z) = f(z+\omega_2)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Demostrar que las únicas funciones enteras doblemente períodicas son las constantes.

4. Supongamos que $f(z)$ es una función entera y $f(z)/z^n$ está acotada para $|z| \geq R$ entonces $f(z)$ es un polinomio de grado menor o igual que n. ¿Qué más puede saberse si $f(z)/z^n$ está acotada en $\mathbb{C}$?

5. Sea f una función continua en un abierto Ω tal que f es holomorfa en $\Omega \setminus \mathbb{R}$. Probar que f es holomorfa en Ω. Generalizar (por ejemplo, cambiar $\mathbb{R}$ por una línea cualquiera de $\mathbb{C}$).

6. Sea h una función continua en un intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Demostrar que la función

$$H(z) = \int_a^b h(t)e^{-itz}dt$$

es una función entera para la que existen constantes $A, C > 0$ tales que

$$|H(z)| \leq Ce^{A|y|} \text{ para todo } z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

A una función entera que satisfaga este tipo de restricción en su crecimiento se le llama *función entera de tipo finito.*

7. Supongamos que la función h del problema anterior está definida en un subintervalo $[a, b]$ de $[0, \infty)$. Demostrar que entonces la correspondiente función H está acotada en el semiplano inferior.

8. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto acotado, y $f : \Omega \to \Omega$ holomorfa. Supongamos que existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) = z_0$ y $f'(z_0) = 1$. Demostrar que entonces f es lineal.
Indicación: puede suponerse $z_0 = 0$. Escribir $f(z) = z + a_n z^n + O(z^{n+1})$ cerca de 0, y comprobar que para $f_k = f \circ ... \circ f$ (composición de f consigo misma k veces) se tiene $f_k(z) = z + k a_n z^n + O(z^{n+1})$. Aplicar entonces las desigualdades de Cauchy y hacer $k \to \infty$.

9. Supongamos que f es una función entera y que para cada $z_0 \in \mathbb{C}$ existe al menos algún coeficiente c_k en su expansión

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

que se anula. Demostrar que f es un polinomio. Indicación: usar un argumento de numerabilidad.

10. Supongamos que f es una función continua y que no se anula en el disco unidad cerrado, y tal que f es holomorfa en el disco unidad abierto. Demostrar que si $|f(z)| = 1$ para todo z con $|z| = 1$, entonces f es constante. Indicación: extender f a todo $\mathbb{C}$ poniendo $f(z) = 1/\overline{f(1/\overline{z})}$ para $|z| > 1$, y razonar como en la demostración del principio de reflexión de Schwarz.

11. Probar el recíproco del teorema de Runge: si K es un compacto de $\mathbb{C}$ cuyo complementario no es conexo, entonces existe una función holomorfa en un entorno de K que no puede ser aproximada uniformemente en K por polinomios. Indicación: Sea $z_0 \in K^c$ y definamos $f(z) = 1/(z - z_0)$. Suponiendo que f pueda ser aproximada uniformemente en K por polinomios, comprobar que existe un polinomio p tal que $|(z - z_0)p(z) - 1| < 1$, y usar el problema 12 de la Hoja 4 para demostrar que esta desigualdad sigue valiendo en la componente conexa de K^c que contiene a z_0.

12. En este problema se demostrará que existe una función entera F con la siguiente propiedad: dada cualquier otra función entera, existe una sucesión creciente (n_k) de números naturales tales que

$$\lim_{k\to\infty} F(z + n_k) = h(z)$$

uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.

Para ello, consideremos una enumeración $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ de los polinomios cuyos coeficientes tienen partes reales e imaginarias en $\mathbb{Q}$.
(a) Demostrar que basta con encontrar una función entera F y una sucesión creciente M_n de naturales tales que

$$|F(z) - p_n(z - M_n)| < \frac{1}{n} \text{ para todo } z \in D_n,$$

donde D_n denota el disco de centro 0 y radio n.
(b) Construir una función con la propiedad anterior poniendo

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z),$$

donde $u_n(z) = p_n(z - M_n)e^{-c_n(z-M_n)^2}$ y c_n, M_n son números positivos elegidos adecuadamente y tales que $\lim c_n = 0, \lim M_n = \infty$ (téngase en cuenta que la función e^{-z^2} tiende a cero rápidamente cuando $|z| \to \infty$ en los sectores $|\arg z| < \pi/4 - \delta$ y $|\pi - \arg z| < \pi/4 - \delta$).

13. Esbozar la traza de la curva $\gamma(t) = e^{it}\operatorname{sen}(2t)$, $0 \le t \le 2\pi$, y determinar $W(\gamma, z)$ para todo z que no está en dicha traza. Después hacer lo mismo con la curva $\sigma(t) = e^{it}\cos(2t)$.

14. Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ son curvas de clase C^1 a trozos, y supongamos que son homótopas en Ω. Demostrar que existe una homotopía $H : [0, 1] \times [a, b] \to \Omega$ entre γ_0 y γ_1 tal que para cada $s \in [0, 1]$ la curva $[a, b] \ni t \mapsto \gamma_s(t) := H(s, t)$ es de clase C^1 a trozos. Demostrar también que si γ_0, γ_1 son de clase C^1 entonces H puede tomarse de clase $C^1([0, 1] \times [a, b])$.
Indicación: usar por ejemplo el teorema de Weierstrass para aproximar una homotopía continua por un polinomio $P(s, t)$ con $P([0, 1] \times [a, b]) \subset \Omega$. Después combinar γ_0, γ_1 y P mediante sumas y multiplicaciones por funciones adecuadas para obtener una función H con las propiedades deseadas.

15. Probar que todo abierto Ω estrellado respecto de un punto (es decir, que existe $z_0 \in \Omega$ tal que para todo $z \in \Omega$ el segmento $[z_0, z]$ está contenido en Ω) es simplemente conexo.

16. Probar que no existe ninguna función f holomorfa en el disco unidad abierto que se extienda con continuidad a su frontera y tal que $f(z) = 1/z$ en dicha frontera.

17. Si f es una función holomorfa en un entorno de $D(z_0, r)$, demostrar que para cada $s \in (0, r)$ existe una constante $C = C(r, s)$ tal que

$$\|f\|_{L^\infty(D(z_0,s))} \le C\|f\|_{L^2(D(z_0,r))}.$$

Deducir que si (f_n) es una sucesión de funciones holomorfas en un abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ que es de Cauchy en la norma $\|\cdot\|_{L^2(U)}$ entonces (f_n) converge a una función holomorfa uniformemente en cada subconjunto compacto de U. Indicación: usar la propiedad del valor medio.