PROBLEMAS DE AMES, GRUPO 2, CURSO 2022-2023. HOJA 2.

1. Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\log n)^2 z^n$;
b) $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$;
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n+3n}(z-6)^n$;
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n$;
e) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n(z-3i)^n$;
f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{1+2^n n^n} z^n$;
g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{6} z^n$;
h) $\sum_{n=1}^{\infty}(2+(-1)^n)^n z^n$.

2. Si $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ es decreciente y $\int_0^{\infty} f(x)dx = \infty$, demostrar que el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)(z-3)^n$ es menor o igual que uno.

3. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias centrada en el origen. Demostrar que para cada z_0 en su disco de convergencia f tiene una expansión en serie de potencias centrada en z_0.
Indicación: poner $z = z_0 + (z - z_0)$ y usar la fórmula del binomio.

4. ¿Qué funciones representan las siguientes series de potencias?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$;
b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$.

5. Demostrar lo siguiente:

a) La serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ no converge en ningún punto de la circunferencia unidad $|z| = 1$.
b) La serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ converge en todo punto de la circunferencia unidad.
c) La serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ converge en todo punto de la circunferencia unidad, excepto en $z = 1$.
Indicación: usar suma por partes.

Obsérvese que las tres series tienen radio de convergencia igual a 1.

6. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x > 0$, y $f(x) = 0$ si $x \leq 0$. Demostrar que $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, pero f no admite desarrollo en serie de potencias centrado en el origen.

7. Supongamos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

para todo $z \in D(0, R)$. Demostrar que:

a) $(f + g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n$ para todo $z \in D(0, R)$.
b) $(fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ para todo $z \in D(0, R)$, donde

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1}b_1 + ... + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n.$$

8. Calcular las integrales $\int_{\gamma} f$ en los siguientes casos:

a) $f(z) = 1/z$, y γ la circunferencia unidad, orientada en el sentido contrario a las agujas del reloj (orientación positiva).

b) $f(z) = z/(z^2 + 6)$, y γ el triángulo de vértices 1, i, $-i$, orientado en el sentido de las agujas del reloj (orientación negativa).

c) $f(z) = \overline{z}/(z + 6)$, y γ el rectángulo de vértices $\pm 9 \pm i$, orientado positivamente.

9. Sea Γ la frontera del conjunto $\{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 4, x + y \geq -2\}$, orientado positivamente. Calcular

$$\int_\Gamma \frac{\overline{z}}{z+1} dz.$$

10. Sean $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ curvas C^1 a trozos tales que el punto final de Γ_j es igual al punto inicial de Γ_{j+1}, y definamos $\Gamma = \Gamma_1 \cup ... \cup \Gamma_n$ (recorrida en el orden natural, es decir, Γ_j antes que Γ_{j+1}). Comprobar que

$$\int_\Gamma f = \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} f.$$

11. Sea γ una curva C^1 a trozos en $\mathbb{C}$, sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ la traza de γ, y sea (f_n) una sucesión de funciones continuas $f_n : \Gamma \to \mathbb{C}$ tales que (f_n) converge uniformemente en Γ a una función f. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n = \int_\gamma f.$$

12. Sean Ω abierto de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua, $\gamma : [a, b] \to \Omega$ de clase C^1, y (γ_n) una sucesión de curvas $\gamma_n : [a, b] \to \Omega$ de clase C^1 tales que $\lim_{n\to\infty} \gamma_n(t) = \gamma(t)$ y $\lim_{n\to\infty} \gamma_n'(t) = \gamma'(t)$ uniformemente en $t \in [a, b]$. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} f = \int_\gamma f.$$

13. Sea $F : [0, 1] \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua, donde Ω es un abierto de $\mathbb{C}$, y sea $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una curva de clase C^1 a trozos. Probar que la función $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(t) = \int_\gamma F(t, z) dz$$

es continua.