PROBLEMAS DE AMES, GRUPO 2, CURSO 2021-2022. HOJA 3.

1. Calcular las siguientes integrales para una curva de clase C^1 a trozos Γ que vaya de $-\pi i$ a πi en el semiplano derecho.

a) $\int_\Gamma z^4 dz$;
b) $\int_\Gamma e^z dz$;
c) $\int_\Gamma \cos z dz$;
d) $\int_\Gamma \operatorname{senh} z dz$.

2. Calcular $\int_C z^n dz$, donde C es cualquier circunferencia centrada en 0 y con orientación positiva, y $n \in \mathbb{Z}$.

3. Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior, suponiendo ahora que C es cualquier circunferencia que no tenga al origen en su círculo interior.

4. Si $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $f(z) = 1/z$, demostrar que f no tiene ninguna primitiva en Ω.

5. Demostrar que si $|a| < r < |b|$ entonces

$$\int_{C_r} \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz = \frac{2\pi i}{a-b},$$

donde C_r es la circunferencia de radio r centrada en 0, con orientación positiva.

6. Demostrar que dos primitivas de una misma función en un abierto conexo difieren en una constante.

7. Demostrar que

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2) dx = \int_0^\infty \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Indicación: integrar la función e^{-z^2} sobre un sector de circunferencia de radio R y ángulo $\pi/4$, y hacer $R \to \infty$.

8. Demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Indicación: integrar la función $f(z) = \frac{e^{iz}-1}{z}$ sobre el borde del semidisco superior de centro 0 y radio R, y hacer $R \to \infty$.

9. Calcular las integrales

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx dx, \text{ y } \int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{sen} bx dx, \text{ donde } a > 0.$$

Indicación: integrar la función e^{-Ax}, con $A = \sqrt{a^2+b^2}$ sobre un sector de circunferencia apropiado, de ángulo ángulo ω, con $\cos\omega = a/A$.

10. Demostrar que para todo $\xi \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi} dx = e^{-\pi\xi^2}.$$

Indicación: Integrar $f(z) = e^{-\pi z^2}$ en el rectángulo de vértices $\pm R$, $\pm R + i\xi$.

11. Sea $f(z) = c_0 + c_1 z + ... + c_n z^n$ un polinomio. Demostrar que

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta = \pi \sum_{j=0}^n |c_j|^2.$$

Demostrar también que
$$\left|\sum_{j,k=0}^{n}\frac{c_j c_k}{j+k+1}\right| \leq \pi\sum_{k=0}^{n}|c_k|^2.$$
Indicación: considerar primero el caso en que los c_j son reales, aplicando el teorema de Cauchy a la función $f(x)^2$ separadamente en la mitad superior y la mitad inferior del disco unidad.

12. Supongamos que f es continua en el disco cerrado $\{z : |z| \leq R\}$ y holomorfa en su interior. Demostrar que
$$\int_{|z|=R} f(z)dz = 0.$$
Indicación: aproximar $f(z)$ uniformemente por $f_r(z) = f(rz)$, $r \to 1^-$.

13. Calcular las siguientes integrales usando las fórmulas integrales de Cauchy o el teorema de Cauchy:

a) $\int_{|z|=2} \frac{z^n}{z-1}dz,\ n \geq 0$
b) $\int_{|z|=1} \frac{z^n}{z-2}dz,\ n \geq 0$
c) $\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{z}dz$
d) $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^m}dz,\ m \in \mathbb{Z}$
e) $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2(z^2-4)e^z}$
f) $\int_{|z-1|=4} \frac{dz}{z(z^2-4)e^z}$

14. Demostrar que si $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es armónica entonces es de clase C^∞.

15. Usar la fórmula integral de Cauchy para demostrar la *propiedad del valor medio de las funciones armónicas*, a saber: si $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es armónica y el disco cerrado de radio ρ y centro z está contenido en Ω, entonces
$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z+\rho e^{i\theta})d\theta.$$

16 (Versión débil del principio del máximo para funciones holomorfas)**.** Supongamos que Ω es un abierto de $\mathbb{C}$, y que $\Gamma \subset \Omega$ es una curva cerrada simple de clase C^1 a trozos cuyo interior está contenido en Ω. Dado z_0 un punto de la región interior a Γ, usar la fórmula integral de Cauchy para demostrar que existe una constante C tal que
$$|f(z_0)| \leq C\sup\{|f(z)| : z \in \Gamma\}$$
para cualquier función f holomorfa en Ω. Después aplicar esta desigualdad a $f(z)^n$, tomar raíces n-ésimas, y hacer $n \to \infty$ para concluir que puede tomarse $C = 1$. Concluir que si f es holomorfa en Ω, el máximo de $|f|$ en la región interior a Γ se alcanza siempre en su frontera Γ.

17. Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Demostrar que el diámetro de $f(\mathbb{D})$ cumple
$$2|f'(0)| \leq \sup_{z,w\in\mathbb{D}} |f(z)-f(w)|.$$

18. Si f es holomorfa en la banda $-1 < y < 1, x \in \mathbb{R}$ y cumple
$$|f(z)| \leq A(1+|z|)^\eta$$
para todo z en dicha banda, donde $\eta \in \mathbb{R}$, demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $A_n \geq 0$ tal que
$$|f^{(n)}(x)| \leq A_n(1+|x|)^\eta$$
para todo $x \in \mathbb{R}$.

19. Demostrar que si $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es armónica y acotada entonces es constante.

20. Demostrar que si u es armónica en un abierto conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y todas las derivadas parciales (de cualquier orden) de u se anulan en un punto $z_0 \in \Omega$, entonces f es constante en Ω.