PROBLEMAS DE AMES, GRUPO 2, CURSO 2021-2022. HOJA 4.

1. Demostrar que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es entera y no constante entonces $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$.

2. Supongamos que $f(z)$ es una función entera y $f(z)/z^n$ está acotada para $|z| \geq R$. Demostrar que entonces $f(z)$ es un polinomio de grado menor o igual que n. ¿Qué más puede saberse si $f(z)/z^n$ está acotada en $\mathbb{C}$?

3. Sea h una función continua en un intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Demostrar que la función

$$H(z) = \int_a^b h(t)e^{-itz}dt$$

es una función entera para la que existen constantes $A, C > 0$ tales que

$$|H(z)| \leq Ce^{A|y|} \text{ para todo } z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

A una función entera que satisfaga este tipo de restricción en su crecimiento se le llama *función entera de tipo finito*.

4. Supongamos que la función h del problema anterior está definida en un subintervalo $[a, b]$ de $[0, \infty)$. Demostrar que entonces la correspondiente función H está acotada en el semiplano inferior.

5. Si f es una función entera, demostrar que para todo $z \in \mathbb{C}$ existe $C \geq 0$ tal que $|f^{(k)}(z)| \leq C(k!)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por otro lado, si Ω es conexo y $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tiene la propiedad de que para algún $z_0 \in \Omega$ existe $C \geq 0$ tal que $|g^{(k)}(z_0)| \leq C$ para todo $k \in \mathbb{N}$, probar que existe una función entera h tal que $h = g$ en Ω.

6. Si Ω es un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ son holomorfas y cumplen que $f(z)g(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$, demostrar que entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$, o bien $g(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$.

7. Sean $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas tales que $0 < |f(z)| < |g(z)|$ para todo z. Demostrar que existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = cg(z)$ para todo z.

8. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ cumple que $|f(z)| \leq 2$ para todo $z \in \Omega$, probar que:

a) si $\Omega = \mathbb{C}$, entonces f es constante;

b) si $\Omega \neq \mathbb{C}$, entonces

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq 2 \, \frac{k!}{\text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)^k}$$

para todo $z_0 \in \Omega$.

9. Comprobar que la función $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(z/n^2)e^{-z^2}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$.

10. Supongamos que f es una función entera y que para cada $z_0 \in \mathbb{C}$ existe al menos algún coeficiente c_n en su expansión

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

que se anula. Demostrar que f es un polinomio. Indicación: usar un argumento de numerabilidad.

11. Para cada abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ se definen

$$\|f\|_{L^2(U)} = \left(\int_U |f|^2\right)^{1/2}, \quad \text{y } \|f\|_{L^\infty(U)} = \sup\{|f(z)| : z \in U\}.$$

Si f es una función holomorfa en un entorno de $\overline{D}(z_0, r)$, demostrar que para cada $s \in (0, r)$ existe una constante $C = C(r, s)$ tal que

$$\|f\|_{L^\infty(D(z_0,s))} \leq C\|f\|_{L^2(D(z_0,r))}.$$

Deducir que si (f_n) es una sucesión de funciones holomorfas en un abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ que es de Cauchy en la norma $\|\cdot\|_{L^2(U)}$, entonces (f_n) converge a una función holomorfa en U, uniformemente en cada subconjunto compacto de U.

Indicación: usar la propiedad del valor medio de las funciones holomorfas.

12. Supongamos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones uniformemente acotada de funciones holomorfas en Ω que converge puntualmente en Ω. Probar que de hecho la convergencia es uniforme en todo subconjunto compacto de Ω.

Indicación: aplicar el teorema de la convergencia dominada a la fórmula de Cauchy para $f_n - f_m$.

13. Probar que si $f : U \to V$ es un homeomorfismo y U es simplemente conexo entonces también lo es V.

14. Probar que no existe ninguna función f holomorfa en el disco unidad abierto que se extienda con continuidad a su frontera y tal que $f(z) = 1/z$ en dicha frontera.

15. Demostrar que si f es holomorfa en un abierto Ω de C en donde no se anula, entonces $\log|f|$ es armónica.

16. Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es simplemente conexo y $u : \omega \to \mathbb{R}$ es armónica, probar que u tiene una conjugada armónica en Ω (es decir, existe $v \in C^2(\Omega)$ armónica tal que $u + iv$ es holomorfa en Ω).

Indicación: la función $G := \partial u/\partial x - i\partial u/\partial y$ es holomorfa, y por tanto tiene una primitiva.

17. Supongamos que f es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Demostrar que existe una constante c tal que $g(z) = f(z) - c/z$ tiene una primitiva en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

18. Consideremos una serie de Laurent centrada en 0, digamos $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. Encontrar una fórmula (en términos de los coeficientes a_n) para ρ y σ definidos respectivamente como el menor $r \in [0, +\infty]$ y el mayor $R \in [0, +\infty]$ tales que la serie converge en el anillo $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$.

19. Escribir las expansiones de Laurent, centradas en 0, de las funciones siguientes:

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}; \quad g(z) = \frac{1}{(z^2-1)(z^2-9)}.$$

20. Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es continua y $g(z) = f(z)^6$ es holomorfa en Ω, demostrar que f es holomorfa. Generalizar.

21. Determinar las singularidades aisladas de las siguientes funciones, y decir si son evitables, esenciales o polos (en este último caso determinar el orden del polo, y la parte principal de la función en el polo):

$$f(z) = \frac{ze^z}{z^2-1}, \quad g(z) = z^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right), \quad h(z) = \frac{\log z}{(z-1)^3}, \quad \varphi(z) = e^{1/(z^2+1)}, \quad \psi(z) = \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2/4}.$$

22. Probar que si f tiene una singularidad aislada en z_0 y $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$ entonces la singularidad es evitable.

23. Probar que si z_0 es una singularidad aislada de una función holomorfa f y $(z - z_0)^N f(z)$ está acotada cerca de z_0 para algún $N \in \mathbb{N}$ entonces la singularidad o bien es evitable o bien es un polo de orden menor o igual que N.

24. Sea f una función holomorfa en $D(p, r) \setminus \{p\}$. Probar que f tiene una singularidad esencial en p si y sólo si para cada $N \in \mathbb{N}$ existe una sucesión (z_n) convergente a p tal que

$$|(z_n - p)^N f(z_n)| \geq n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

25. Sea E un conjunto discreto (es decir, sin puntos de acumulación). Demostrar que si $f : \mathbb{C} \setminus E \to \mathbb{C}$ es holomorfa y acotada entonces f es constante.