PROBLEMAS DE AMES, GRUPO 2, CURSO 2021-2022. HOJA 5.

1. Demostrar la siguiente versión de la regla de l'Hôpital para funciones holomorfas: si $f, g : D(z_0, r) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ son funciones holomorfas tales que $\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} g(z) = 0$ y existen $\lim_{z \to z_0} f'(z)$, $\lim_{z \to z_0} g'(z) \neq 0$, entonces existe

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

2. Demostrar que si $f(z)$ es una función entera no constante entonces $e^{f(z)}$ tiene una singularidad esencial en ∞.

3. Sea (f_n) una sucesión de funciones holomorfas en $U := D(p, r) \setminus \{p\}$. Supongamos que cada f_n tiene un polo en p, y que (f_n) converge a una función f, uniformemente en cada compacto contenido en U. ¿Tiene f necesariamente un polo en p? Contestar a la misma pregunta con polo cambiado por singularidad esencial o por singularidad evitable.

4. Sea f holomorfa en $U := D(p, r) \setminus \{p\}$. Probar que f y f^2 tienen singularidades del mismo tipo en p.

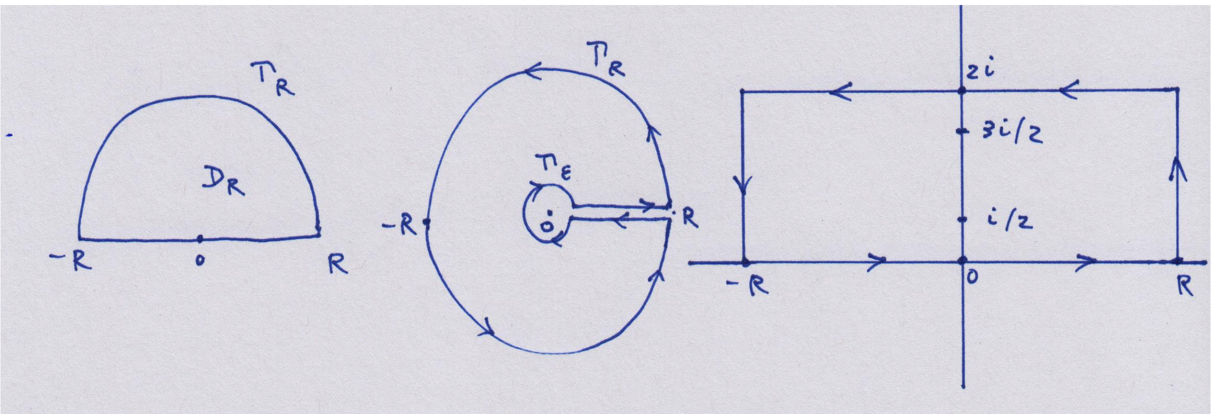
5. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua, y supongamos que f es holomorfa en $\{x + iy : xy \neq 0\}$. Demostrar que f es holomorfa en $\mathbb{C}$.

6. Si P y Q son polinomios complejos tales que grado(Q) $\geq$ grado$(P) + 2$ y Q no tiene ceros en $\mathbb{R}$, demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \text{Res}\left(\frac{P}{Q}, z_j\right),$$

donde $z_1, ..., z_m$ son los polos de P/Q en el semiplano superior.

Indicación: aplicar el teorema de los residuos en el recinto D_R de la figura y hacer $R \to \infty$.



7. Probar que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx = \pi e^{-a}$.

8. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx$.

9. Sean $Q(z)$ un polinomio complejo de grado m sin ceros en $\mathbb{R}$, y f una función holomorfa en un abierto que contiene el semiplano superior cerrado. Supongamos que existe $b < m - 1$ tal que $|f(z)| \leq |z|^b$ para $|z| > 1$ y $\text{Im}(z) \geq 0$. Probar que, si $z_1, ..., z_k$ son los ceros de $Q(z)$ en el semiplano superior abierto, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \text{Res}\left(\frac{f}{Q}, z_j\right).$$

10. Calcular $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta} d\theta$ si $a > 1$.
Indicación: usar el teorema de los residuos en el círculo unidad.

11. Demostrar que
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \operatorname{sen}\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$
para todos $a > b > 0$.

12. Demostrar que
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1-2r\cos\theta + r^2} d\theta = \frac{2\pi}{1-r^2}$$
para todo $0 < r < 1$.

13. Demostrar que
$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{(1+x)^2} dx = \frac{\pi\alpha}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}$$
para $-1 < \alpha < 1$.
Indicación: considerar la rama de la función $z^\alpha/(1+z)^2$ definida en $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ por $f(z) = r^\alpha e^{i\alpha\theta}/(1+z)^2$ si $z = re^i\theta$, $0 < \theta < 2\pi$, y usar el teorema de los residuos en uno de los recintos de la figura.

14 (Lema de Jordan)**.** Si Γ_R es la traza de $z(t) = Re^{it}$, $0 \le t \le \pi$, probar que
$$\int_{\Gamma_R} |e^{iz}|\,|dz| < \pi.$$
Indicación: $\operatorname{sen} t \ge 2t/\pi$ si $t \in [0, \pi/2]$.

15. El lema de Jordan puede usarse para calcular mediante el teorema de los residuos integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{sen} x dx$ o del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos x dx$, donde P y Q son polinomios con grado(Q) = grado$(P) + 1$ y Q no tiene ceros en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, demostrar que
$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^3 \operatorname{sen} x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

16. Probar que
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\cosh(\pi x)} dx = \frac{1}{\cosh(\pi\xi)}.$$
Indicación: usar el teorema de los residuos en el rectángulo de la figura.

17. Calcular $\int_0^\infty \frac{1}{P(x)} dx$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado mayor que uno que no tiene ningún cero en $[0,\infty)$.
Indicación: usar el teorema de los residuos en el recinto *comecocos* de la figura con la función $g(z) = \frac{\log z}{P(z)}$, donde $\log$ denota la rama del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$.

18. Sean R una función racional, y $f : \mathbb{C} \setminus \{p_1, ..., p_n\} \to \mathbb{C}$ holomorfa con polos en $\{p_1, ..., p_n\}$, tales que $|f(z)| \le |R(z)|$ para todo z donde f y R están definidas. Demostrar que f es un múltiplo constante de R, y en particular racional.

19. Usar el teorema de Rouché para averiguar cuántos ceros tiene el polinomio $P(z) = z^6 + 9z^4 + z^3 + 2z + 4$ dentro del círculo unidad.

20. Demostrar que $2z^5 + 6z - 1$ tiene una raíz en el intervalo $(0,1)$ y cuatros raíces en el anillo $\{z : 1 < |z| < 2\}$.

21. Probar que para todos $m, n \in \mathbb{N}$, el polinomio
$$P(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^m}{m!} + 3z^n$$
tiene exactamente n raíces en el disco unidad.