SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN FINAL DE ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA DEL 8/01/2018.

1. Calcular el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}.$$

Indicación: aplicar el teorema de los residuos integrando $f(z) = z^2/(1+z^4)$ en el borde del semidisco superior de centro 0 y radio R.

Solución: Llamemos Ω_R al semidisco superior de centro 0 y radio R, y denotemos por Γ_R el borde de Ω_R. La función $f(z) = z^2/(1+z^4)$ es meromorfa en $\mathbb{C}$, con polos simples en las raíces cuartas de -1. Las dos raíces cuartas de -1 que están dentro de Ω_R para $R > 1$ son $e^{\pi i/4}$ y $e^{3\pi i/4}$, es decir, los puntos $\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$. Por la Proposición 9.4(3) tenemos que

$$\text{Res}(f, e^{\pi i/4}) = \frac{z^2}{4z^3}_{|_{z=e^{i\pi/4}}} = \frac{1}{4}e^{-i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

y análogamente

$$\text{Res}(f, e^{3\pi i/4}) = \frac{1}{4}e^{-3\pi i/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Entonces, usando el teorema de los residuos obtenemos que, para todo $R > 1$,

$$\int_{\Gamma_R} f = 2\pi i \Big(\text{Res}(f, e^{\pi i/4}) + \text{Res}(f, e^{3\pi i/4}) \Big) = 2\pi i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Por otro lado,

$$\int_{\Gamma_R} f = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4}dx + \int_0^{\pi} \frac{\left(Re^{it}\right)^2 Rie^{it}}{1+\left(Re^{it}\right)^4}dt,$$

y la segunda de las integrales del miembro de la derecha tiende a 0 cuando R tiende a infinito, ya que

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{\left(Re^{it}\right)^2 Rie^{it}}{1+\left(Re^{it}\right)^4}dt \right| \le \int_0^{\pi} \frac{R^3}{R^4-1}dt = \frac{\pi R^3}{R^4-1} \to 0$$

cuando $R \to \infty$. Por tanto se concluye que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

2. Si $|\xi| < 1$, demostrar que $\varphi(z) = (z-1)^n e^{2z} + \xi(z+1)^n$ tiene n ceros en el semiplano derecho.

Indicación: aplicar el teorema de Rouché en el borde del semidisco derecho de centro 0 y radio R (con un $R > 0$ adecuado).

Solución: Sea $R > 1$. Llamenos W_R al semidisco derecho de centro 0 y radio R, y denotemos su borde por σ_R, que consiste en el segmento $[-iR, iR]$ unido con la semicircunferencia $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Vamos a aplicar el teorema de Rouché en W_R con

$$f(z) = (z-1)^n e^{2z}, \;\; g(z) = \xi(z+1)^n.$$

Es claro que las funciones f y g son holomorfas en $\mathbb{C}$, y que f tiene un cero de orden n en $z = 1$, punto que está contenido en W_R. Comprobaremos que, para algún $R > 1$ dependiendo de ξ, se tiene que

$$|f(z)| > |g(z)| \text{ para todo } z \in \sigma_R = \partial W_R,$$

y entonces concluiremos, por el teorema de Rouché, que $\varphi = f + g$ tiene n ceros, contados con sus multiplicidades, en W_R (recinto que por supuesto está contenido en el semiplano derecho).

Consideremos primero el caso en que $z \in [-iR, iR]$, es decir $z = iy$, con $y \in [-R, R]$. Se tiene que

$$|f(z)| = |f(iy)| = |iy - 1|^n |e^{2iy}| = |1 + y^2|^{n/2} > |\xi||1 + y^2|^{n/2} = |\xi(iy + 1)^n| = |g(z)|,$$

dado que $|\xi| < 1$, y esto vale cualquiera que sea $R > 1$. Consideremos ahora el caso en que $z = Re^{it}$, con $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, es decir, $z \in \gamma_R$. Por una parte tenemos, al ser $z = x + iy$ con $x \geq 0$, que

$$|e^{2z}| = e^x \geq 1,$$

y por otra, como $|z| = R > 1$, es

$$|z - 1|^n \geq (|z| - 1)^n = (R - 1)^n.$$

Análogamente,

$$|z + 1|^n \leq (|z| + |1|)^n = (R + 1)^n.$$

Juntando estas desigualdades obtenemos que

$$|f(z)| = |z - 1|^n |e^{2z}| \geq (R - 1)^n, \text{ y que } |\xi|(R + 1)^n \geq |\xi||z + 1|^n = |g(z)|.$$

Por tanto conseguiremos lo que deseamos siempre que

$$(R - 1)^n > |\xi|(R + 1)^n,$$

y esto efectivamente, aunque es falso para algunos R relativamente pequeños, se tiene para todo R suficientemente grande, dado que

$$\lim_{R \to \infty} \frac{(R - 1)^n}{(R + 1)^n} = 1 > |\xi|.$$

□

3. Demostrar que si $f : D(0, 1) \to \mathbb{C}$ es una función tal que f^2 y f^3 son holomorfas, entonces f es holomorfa.

Solución: Si $f(z) \neq 0$ entonces es claro que f es holomorfa en z, ya que f es cociente de funciones holomorfas que no se anulan; a saber:

$$f(w) = \frac{f(w)^2}{f(w)^3},$$

donde $f(w)^2$ y $f(w)^3$ no se anulan en un entorno de z (al ser f^2 y f^3 continuas, por ser holomorfas, y no nulas en z), y son funciones holomorfas.

Por tanto, la única dificultad está en probar que f es holomorfa en los puntos z tales que $f(z) = 0$. Dichos puntos podemos suponer, sin pérdida de gereralidad, que son aislados, dado que de lo contrario, por el teorema de identidad, tendríamos que f sería idénticamente cero, y en particular holomorfa.

Así pues, consideremos un punto z_0 y un número $r > 0$ tal que $f(z_0) = 0$ y $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Debemos probar que f es holomorfa en z_0. Si hubiéramos supuesto que f es continua, esto sería una consecuencia directa del teorema de las singularidades evitables de Riemann. Pero dicha suposición no figura entre las hipótesis del problema, así que argumentaremos de otra manera.

Como f^2 y f^3 son holomorfas en el disco $D(z_0, r)$, tienen desarrollos en series de potencias en este disco, digamos

$$f(z)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad f(z)^3 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

Además como las funciones f^2 y f^3 se anulan en z_0 pero no son idénticamente nulas, tienen ceros de orden finito, digamos N y M respectivamente. Es decir, podemos escribir

$$f(z)^2 = (z - z_0)^N g(z), \quad \text{y } f(z)^3 = (z - z_0)^M h(z),$$

donde $g(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ y $h(z) = \sum_{n=M+1}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ son funciones holomorfas en $D(z_0, r)$ que no se anulan en el disco $D(z_0, r)$.

Ahora bien,

$$|z-z_0|^M |h(z)| = |f(z)^3| = |f(z)^2|^{3/2} = \left(|z-z_0|^N |g(z)|\right)^{3/2},$$

luego

$$\frac{|h(z)|}{|g(z)|^{3/2}} = |z-z_0|^{3N/2-M},$$

y como la función $|h|/|g|^{3/2}$ es continua en z_0 y no se anula en z_0, se deduce que $3N = 2M$. En particular $M - N = M - \frac{2}{3}M > 0$. Por tanto

$$f(z) = \frac{f(z)^3}{f(z)^2} = \frac{(z-z_0)^M h(z)}{(z-z_0)^N g(z)} = (z-z_0)^{M-N} \frac{h(z)}{g(z)},$$

donde $M - N > 0$ y h/g es holomorfa en $D(z_0, r)$. Esto implica que f es holomorfa en $D(z_0, r)$. □

4. Sean $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funciones enteras, y supongamos que $f \circ g(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que f y g son biyectivas, y que $f = g^{-1}$.

Solución: Por el teorema de identidad se deduce inmediatamente que $f \circ g(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Esto implica que g es inyectiva y que f es sobreyectiva. Veamos que g es también sobreyectiva, y entonces habremos acabado (porque al ser g biyectiva y tenerse $f \circ g = \mathrm{id}$, se deduce que $f = g^{-1}$ también es biyectiva).

Razonemos por reducción al absurdo. Denotemos $U = g(\mathbb{C})$, que es abierto, por el teorema de la aplicación abierta. Si g no es sobre, entonces existe $w_0 \in \mathbb{C}$ tal que w_0 está en la frontera de U, frontera que, al ser U abierto, está contenida en $\mathbb{C} \setminus U$. Por tanto existe una sucesión $(w_n) = (g(z_n)) \subset U$ tal que $\mathbb{C} \setminus U \ni w_0 = \lim_{n\to\infty} w_n$. Pero entonces, usando la continuidad de f y el hecho de que $f \circ g = \mathrm{id}$,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} f(g(z_n)) = \lim_{n\to\infty} f(w_n) = f(w_0),$$

y esto implica, usando la continuidad de g, que

$$w_0 = \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = g(f(w_0)) \in g(\mathbb{C}) = U,$$

lo que contradice que $w_0 \in \mathbb{C} \setminus U$. □

5. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua con $\int_{-\infty}^{\infty} |g| < \infty$, sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$, y sea $f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{C}$ continua tal que para cada $t \in \mathbb{R}$ la función $z \mapsto f(t, z)$ es holomorfa. Supongamos además que

$$\sup_{(t,z)\in\mathbb{R}\times\Omega_R} |f(t,z)| < \infty$$

para cada $R > 0$, en donde $\Omega_R := \{z \in \Omega : |z| \le R, \mathrm{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \ge 1/R\}$ si $\Omega \ne \mathbb{C}$, y $\Omega_R := \overline{D}(0, R)$ si $\Omega = \mathbb{C}$. Demostrar que entonces la función $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(t, z) dt$$

es holomorfa.

Solución: Definamos la función

$$\varphi_N(z) = \int_{-N}^{N} g(t) f(t, z) dt.$$

Usando el teorema de derivación bajo el signo integral se comprueba inmediatamente que φ_N es holomorfa en Ω, para cada $N \in \mathbb{N}$. Entonces, si comprobamos que la sucesión de funciones $(\varphi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge, uniformemente en los compactos de Ω, a la función φ, se deducirá, usando el Teorema 5.17 (una consecuencia del teorema de Morera), que φ es holomorfa en Ω. Y en efecto se tiene que, dado $K \subset \Omega$ compacto, existe $R > 0$ tal que $K \subseteq \Omega_R$, luego

$$|g(t)f(t,z)| \leq |g(t)| \sup_{(t,z)\in\mathbb{R}\times\Omega_R} |f(t,z)| := |g(t)|C_R,$$

de donde

$$|\varphi_N(z) - \varphi(z)| \leq \int_{-\infty}^{-N} |g(t)f(t,z)|dt + \int_N^{\infty} |g(t)f(t,z)|dt \leq C_R \left(\int_{-\infty}^{-N} |g(t)|dt + \int_N^{\infty} |g(t)|dt \right)$$

para todo $z \in K$. Como $\int_{-\infty}^{\infty} |g| < \infty$, se tiene que el miembro de la derecha, que no depende de $z \in K$, tiende a cero cuando N tiende a infinito, y de aquí se sigue inmediatamente que $\lim_{N\to\infty} \varphi_N(z) = \varphi(z)$, uniformemente en K. $\square$