SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN FINAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DEL 18/01/2019.

Problema 1. Hallar todas las funciones continuas $f : [0, \pi] \to [0, \infty]$ tales que $f(x) \leq \int_0^x f(t)dt$ para todo $x \in [0, \pi]$.

Solución: Si f es una tal función, aplicando la desigualdad de Gronwall (Lema 2.6, con $\alpha(t) = 0$, $\beta(s) = 1$, $\psi(t) = f(t)$), se obtiene que $f(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, \pi]$. Como por hipótesis también es $f(t) \geq 0$, se concluye que $f(t) = 0$ es la única solución de esta desigualdad diferencial.

Problema 2. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = a\,x(t)^3|\operatorname{sen}\lambda| + b\,y(t) \\ y'(t) = -c\,x(t) + d\,y(t)^3|\cos\lambda|, \end{cases}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro, y a, b, c, d son números reales dados. Sea $\Phi(t, u, v, \lambda)$ una solución de este sistema con condición inicial $x(0) = u, y(0) = v$.

1. Justificar que: para cada $\lambda, u, v \in \mathbb{R}$ existe una única solución $t \mapsto \Phi(t, u, v, \lambda)$ con estas condiciones; que $\Phi(t, u, v, \lambda)$ es continua en sus cuatro variables, y que existen y son continuas (en sus cuatro variables) las derivadas parciales $\partial\Phi/\partial u$, $\partial\Phi/\partial v$. Calcular $\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\partial v}(0, 1, 1, \pi)$.
2. Si $bc < 0$ y $ad < 0$, demostrar que $(0, 0)$ es un equilibrio inestable, independientemente del valor del parámetro λ.
3. Si $bc > 0$, $a < 0$ y $d < 0$, demostrar que $(0, 0)$ es un equilibrio asintóticamente estable, independientemente del valor de λ. ¿Qué ocurre si $bc > 0$, $d = 0$ y $a < 0$?

Solución: **2.1.** Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, consideremos el campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f_\lambda(x, y) = \left(ax^3|\operatorname{sen}\lambda| + by,\ -cx + dy^3|\cos\lambda|\right).$$

Como las componentes de f_λ son polinomios en las variables x, y, la función f_λ es de clase C^∞, y en particular localmente Lipschitz, luego, por el Teorema de Picard-Lindelöf, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} (x'(t), y'(t)) = f_\lambda(x(t), y(t)) \\ (x(0), y(0)) = (u, v) \end{cases}$$

tiene solución local única, que denotamos $\Phi(t, u, v, \lambda)$. También sabemos, por el teorema de diferenciabilidad del flujo, que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo, la aplicación $(t, u, v) \mapsto h_\lambda(t, u, v) := \Phi(t, u, v, \lambda)$ es de clase C^∞, y la diferencial de h_λ respecto de las variables (x, y) es la solución de la primera ecuación variacional:

$$\begin{cases} \psi'(t) = A_\lambda(t, u, v)\psi(t) \\ \psi(0) = \mathbb{I} \end{cases}$$

donde $A_\lambda(t, u, v) = Df_\lambda(h_\lambda(t, u, v))$, siendo

$$Df_\lambda(u, v) = \begin{pmatrix} 3au^2|\operatorname{sen}\lambda| & b \\ -c & 3dv^2|\cos\lambda| \end{pmatrix}.$$

Como las funciones $3au^2|\operatorname{sen}\lambda|$ y $3dv^2|\cos\lambda|$ son continuas y el flujo Φ también lo es, la función $A_\lambda(t,u,v)$ que gobierna la primera ecuación variacional está localmente acotada, lo que implica que la función

$$\mathbb{R}\times\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ni(t,\psi,u,v,\lambda)A_\lambda(t,u,v)\psi$$

es localmente Lipschitz en la variable matricial ψ, uniformemente respecto de la variable t y de los parámetros u,v,λ. Entonces por el Teorema 2.10 (de dependencia continua respecto de parámetros), la única solución de la primera ecuación variacional depende continuamente de t,u,v,λ. Esto significa que las entradas de la matriz $Dh_\lambda(u,v)$, que son precisamente las derivadas parciales $\partial\Phi^1/\partial u$, $\partial\Phi^1/\partial v$, $\partial\Phi^2/\partial u$, $\partial\Phi^2/\partial v$, son continuas en las variables t,u,v,λ.

Para calcular $\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\partial v}(0,1,1,\pi)$ primero observamos que, para $\lambda\in\mathbb{R}$ fijo aunque arbitrario, el teorema de diferenciabilidad del flujo aplicado al sistema $(x',y')=f_\lambda(x,y)$ nos asegura que la función $(t,u,v)\mapsto\Phi(t,u,v,\lambda)$ es de clase C^∞; en particular es de clase C^2 y por el teorema de Schwarz tenemos

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\partial v}(0,1,1,\pi)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial v\partial t}(0,1,1,\pi).$$

Como, por definición del flujo,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=f_\lambda(\Phi(t,u,v,\lambda)),\quad\text{y}\quad\Phi(0,u,v,\lambda)=(u,v),\tag{1}$$

obtenemos

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}(0,u,v,\lambda)=f_\lambda(u,v)=(au^3|\operatorname{sen}\lambda|+bv,-cu+dv^3|\cos\lambda|),$$

de donde

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial v\partial t}(0,u,v,\lambda)=(b,3dv^2|\cos\lambda|),$$

y por tanto

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\partial v}(0,1,1,\pi)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial v\partial t}(0,1,1,\pi)=(b,3d).$$

2.2 Suponiendo que $bc<0$, tenemos que

$$Df_\lambda(x,y)=\begin{pmatrix}3ax^2|\operatorname{sen}\lambda| & b\\ -c & 3dy^2|\cos\lambda|\end{pmatrix},$$

y en particular

$$Df_\lambda(x,y)=\begin{pmatrix}0 & b\\ -c & 0\end{pmatrix};$$

los autovalores de esta matriz son $\sqrt{-bc}$ y $-\sqrt{-bc}$, y el primero de ellos es positivo, luego por el principio de linealización $(0,0)$ es un equilibrio inestable del sistema $(x',y')=f_\lambda(x,y)$, independientemente del valor de λ.

2.3. Suponemos ahora que $bc>0$, es decir, b y c tienen el mismo signo. Si este signo es positivo, consideraremos la función $V(x,y)=\frac{1}{2}(cx^2+by^2)$. Si el signo de b y de c es negativo, entonces definiremos $V(x,y)=-\frac{1}{2}(cx^2+by^2)$. Es decir, en todo caso ponemos $V(x,y)=\frac{1}{2}(|c|x^2+|b|y^2)$, y se tiene que que $V\in C^1(\mathbb{R}^2)$, $V\geq 0$, y $V(x,y)=0\iff(x,y)=(0,0)$. Además

$$DV(x,y)f_\lambda(x,y)=a|c|x^4|\operatorname{sen}\lambda|+|b|dy^4|\cos\lambda|\leq 0\text{ para todo }(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\text{ y para todo }\lambda\in\mathbb{R},$$

ya que $a<0$, $d<0$. Se ve por tanto que V es una función de Liapunov de estabilidad para cualquier valor de λ. Si $\cos\lambda\neq 0\neq\operatorname{sen}\lambda$, la desigualdad es claramente estricta y entonces V es una función de Liapunov de estabilidad asintótica. Por el Teorema 8.1 resulta directamente que $(0,0)$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema $(x',y')=f_\lambda(x,y)$ siempre que $\cos\lambda\neq 0\neq\operatorname{sen}\lambda$, y la cuenca de atracción de $(0,0)$ es todo $\mathbb{R}^2$. En el caso en que $\operatorname{sen}\lambda\cos\lambda=0$ hay que trabajar un poco más para ver cómo podemos asegurar la estabilidad asintótica de $(0,0)$.

Si $\cos\lambda = 0$, entonces $\operatorname{sen}\lambda \neq 0$, y tenemos

$$DV(x,y)f_\lambda(x,y) = acx^4|\operatorname{sen}\lambda| \text{ para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Esta expresión es menor o igual que cero siempre (ya que $a < 0$), con lo que queda claro que V es una función de Liapunov de estabilidad, y $(0,0)$ es estable. Pero podemos afinar mucho más usando el Teorema de Krasovskii-Lasalle (Teorema 8.2) para asegurar la estabilidad asintótica de $(0,0)$. En efecto, para cada $r > 0$ consideremos el compacto $K_r := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : V(x,y) \leq r\}$. Como

$$DV(x,y)f_\lambda(x,y) \leq 0 \text{ para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

un argumento estándar (por reducción al absurdo y aplicando el teorema del valor medio a la función $g(t) = V(\Phi(t,u,v,\lambda)$, etc) muestra que este compacto K_r es positivamente invariante. Además, si $(x_\lambda(t), y_\lambda(t))$ es una solución de

$$\begin{cases} x' = ax^3|\operatorname{sen}\lambda| + by \\ y' = -cx \end{cases} \tag{2}$$

distinta del equilibrio $(0,0)$ (que, como se ve fácilmente, es el único punto de equilibrio de este sistema), entonces $t \mapsto V(x_\lambda(t), y_\lambda(t))$ no puede ser constante (ya que, si lo fuera, tendríamos

$$0 = \frac{d}{dt}V(x_\lambda(t), y_\lambda(t)) = DV(x_\lambda(t), y_\lambda(t))f_\lambda(x_\lambda(t), y_\lambda(t)) = a|c|\, x_\lambda(t)^4|\operatorname{sen}\lambda|,$$

luego $x_\lambda(t) = 0$ para todo t, lo que sustituyendo en (2) nos daría $(x'_\lambda(t), y'_\lambda(t)) = (0,0)$, y entonces $(x_\lambda(t), y_\lambda(t))$ sería constante, es decir, un equilibrio, que sólo puede ser $(0,0)$, en contra de lo supuesto). Luego podemos aplicar el Teorema de Krasovskii-LaSalle para concluir que $(0,0)$ es asintóticamente estable y que K_r está contenido en la cuenca de atracción de $(0,0)$. Como $r > 0$ es arbitrario y $\bigcup_{r>0} K_r = \mathbb{R}^2$, dicha cuenca de atracción es todo $\mathbb{R}^2$. Este argumento vale tal cual en el caso en que $bc < 0$, $d = 0$, $a < 0$ y $\operatorname{sen}\lambda \neq 0$, y por tanto en esta situación también $(0,0)$ es un equilibrio asintóticamente estable.

Si $\operatorname{sen}\lambda = 0$ y $bc < 0$, $d = 0$, $a < 0$ entonces nuestro sistema se reduce al sistema lineal $(x', y') = (by, -cx)$, cuyas soluciones son todas periódicas, y por tanto en este caso sólo hay estabilidad, no estabilidad asintótica.

Por último supongamos que $bc > 0$, $a < 0$, $d < 0$, $\operatorname{sen}\lambda = 0$ (y consiguientemente $\cos\lambda \neq 0$). En este caso tenemos

$$DV(x,y)f_\lambda(x,y) = |b|dy^4|\cos\lambda| \text{ para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$

expresión que es siempre menor o igual que 0. Nuevamente consideramos, para cada $r > 0$, el compacto $K_r := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : V(x,y) \leq r\}$. Como

$$DV(x,y)f_\lambda(x,y) \leq 0 \text{ para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

por un argumento estándar se comprueba que este compacto K_r es positivamente invariante. Por otro lado, si $(x_\lambda(t), y_\lambda(t))$ es una solución de

$$\begin{cases} x' = by \\ y' = -cx + dy^3|\cos\lambda| \end{cases} \tag{3}$$

distinta del único equilibrio $(0,0)$ de este sistema, entonces $t \mapsto V(x_\lambda(t), y_\lambda(t))$ no puede ser constante (en efecto, si lo fuera, tendríamos

$$0 = \frac{d}{dt}V(x_\lambda(t), y_\lambda(t)) = DV(x_\lambda(t), y_\lambda(t))f_\lambda(x_\lambda(t), y_\lambda(t)) = |b|d\, y_\lambda(t)^4|\cos\lambda|,$$

luego $y_\lambda(t) = 0$ para todo t, lo que sustituyendo en (3) nos diría que $(x'_\lambda(t), y'_\lambda(t)) = (0,0)$, y así $(x_\lambda(t), y_\lambda(t))$ sería un equilibrio, lo cual es imposible). Por el Teorema de Krasovskii-LaSalle concluimos que $(0,0)$ es asintóticamente estable y que K_r está contenido en la cuenca de atracción de $(0,0)$. Como $r > 0$ es arbitrario, nuevamente la cuenca de atracción es todo $\mathbb{R}^2$.

Problema 3. Sea $f(x) = x(5+3x-2x^2)$, y consideremos la ecuación $x''+f(x) = 0$. Estudiar la estabilidad de sus puntos de equilibrio, y dibujar el diagrama de fases del sistema. Sea $u(t)$ la solución que satisface $u(0) = 0$, $u'(0) = \sqrt{2}$, y sea w la solución que cumple $w(0) = 0$, $w'(0) = 1$. Describir el comportamiento de $u(t)$ y de $w(t)$. ¿Están definidas para todo tiempo u y w?

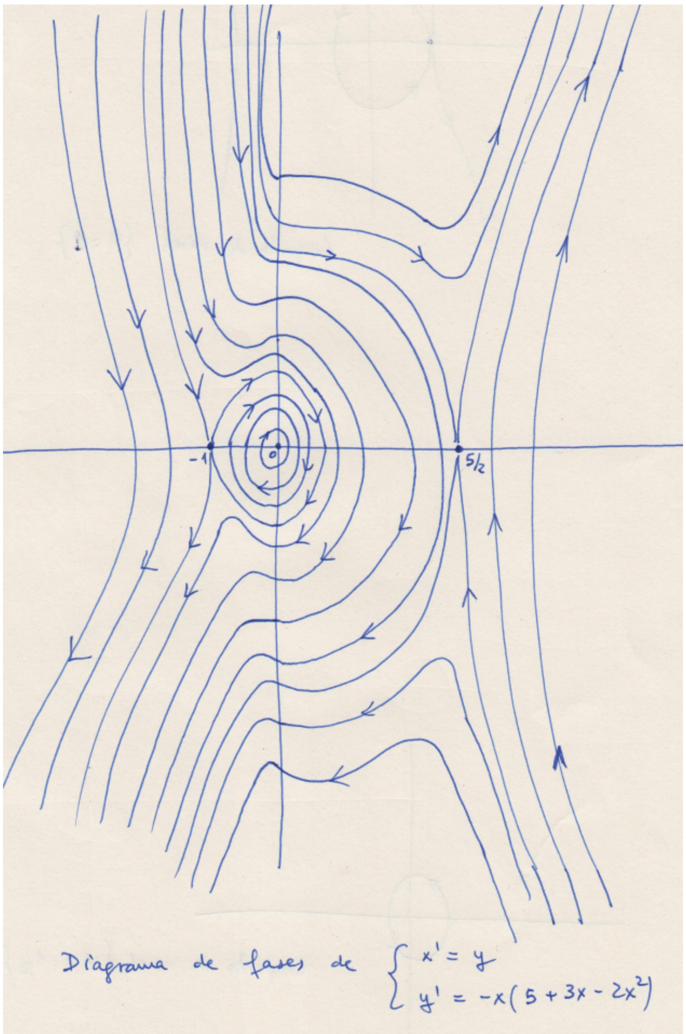
Solución: La ecuación de segundo orden es equivalente al sistema autónomo

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x(5+3x-2x^2). \end{cases} \tag{4}$$

Se ve sin dificultad que los puntos de equilibrio de este sistema son $(-1,0)$, $(0,0)$, y $(5/2,0)$. Una integral primera del sistema es

$$H(x,y) = \int_0^x f(t)dt + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2\left(5+2x-x^2\right) + \frac{1}{2}y^2.$$

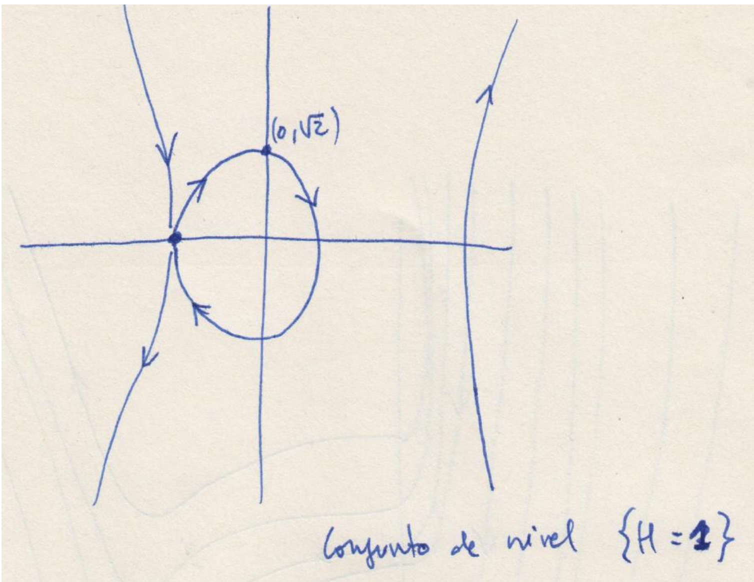
Por tanto las curvas integrales del sistema estarán contenidas en las curvas de nivel de H. La representación gráfica de estas curvas de nivel, junto con las consideraciones habituales, nos permite hacer el siguiente esbozo del diagrama de fases para el sistema:



Inspeccionando este diagrama de fases concluimos que:

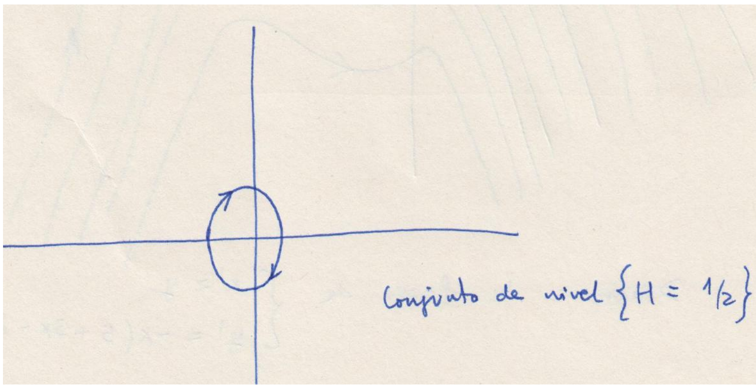
- El punto $(0,0)$ es un equilibrio estable, pero no asintóticamente estable, ya que está rodeado, en sus proximidades, de órbitas periódicas no constantes.
- El punto de equilibrio $(-1,0)$ es inestable.
- El punto de equilibrio $(5/2,0)$ es inestable.

La solución $u(t)$ de $x'' + f(x) = 0$ que satisface $u(0) = 0$, $u'(0) = \sqrt{2}$ corresponde a la curva integral de (4) con condición inicial $(0, \sqrt{2})$, que está en el conjunto de nivel $\{H = 1\}$. Este conjunto de nivel es:



La interpretación de esta parte del diagrama de fases conduce a la siguiente conclusión: la solución $(u(t), u'(t))$ por la que nos preguntan está definida para todo tiempo, ya que está contenida en un conjunto compacto invariante (del cual no puede salir sin tocar el punto de equilibrio $(-1,0)$, lo cual le está prohibido por la unicidad de las soluciones) y puede aplicarse el Corolario 3.19. Esta solución *sale* del equilibrio $(-1,0)$ en tiempo $t = -\infty$, llega a $(0, \sqrt{2})$ en tiempo $t = 0$, y *acaba* en el equilibrio $(-1,0)$ en tiempo $t = +\infty$. No es una órbita periódica, sino inyectiva.

La solución $w(t)$ de $x'' + f(x) = 0$ que satisface $w(0) = 0$, $w'(0) = 1$ corresponde a la curva integral de (4) con condición inicial $(0,1)$, que está en el conjunto de nivel $\{H = 1/2\}$. Este conjunto de nivel es:



Como esta curva de nivel es una curva cerrada simple que no contiene ningún equilibrio y debe contener a la solución por la que ahora nos interesamos, la Proposición 5.15 nos asegura que esta curva de nivel coincide con la órbita de la solución $(w(t), w'(t))$, que por tanto es una órbita periódica y en particular está definida para todo tiempo.

Problema 4. Para cierto campo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 se sabe que:

1. $\Gamma_1 := \{(x,y) : x^2+y^2=1\}$ y $\Gamma_2 := \{(x,y) : x^2+3y^2=9\}$ son conjuntos invariantes para el flujo $\Phi(t,x,y)$ de f.
2. f no tiene ningún punto de equilibrio en $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Si $A = \{(x,y) : 1 < x^2+y^2,\, x^2+3y^2 < 9\}$, demostrar que $\int_A \mathrm{div} f(x,y)dxdy = 0$.

Solución: Al ser Γ_1 y Γ_2 curvas cerradas simples invariantes para el flujo de f y no contener puntos de equilibrio, por la Proposición 5.15 podemos asegurar que Γ_1 y Γ_2 son las trayectorias de dos soluciones periódicas no constantes de $(x',y') = f(x,y)$. Como órbitas distintas no pueden cortarse, se sigue que la región doblemente conexa delimitada por estas dos curvas, a saber,

$$A = \{(x,y) : 1 < x^2+y^2,\, x^2+3y^2 < 9\},$$

es invariante por el flujo (tanto positiva como negativamente). Es decir, que

$$\Phi(t,x,y) \in A \text{ para todo } (x,y) \in A,$$

lo que implica que

$$\{\Phi(t,x,y) : (x,y) \in A\} \subseteq A \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

(el flujo está definido para todo tiempo gracias al Corolario 3.19, ya que las soluciones que comienzan en el compacto $\overline{A}$ no pueden salirse de $\overline{A}$). De hecho por el Teorema 5.6(3) se tiene que

$$\Phi_t(A) = A \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

y por tanto la función $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathrm{vol}(\Phi_t(A))$ es constante, lo que por el Teorema de Liouville 5.9 implica que

$$0 = \frac{d}{dt}\mathrm{vol}(\Phi_t(\overline{A}))_{|t=0} = \int_{\Phi_t(\overline{A})} \mathrm{div}(f(x))dxdy_{|t=0} = \int_{\overline{A}} \mathrm{div}(f(x,y))dxdy = \int_A \mathrm{div}(f(x,y))dxdy.$$

Observación: este ejercicio también puede resolverse usando el Teorema de Green (o, equivalentemente, el teorema de la divergencia en el plano) una vez que se ha observado que Γ_1 y Γ_2 son órbitas periódicas de $(x',y') = f(x,y)$ y por tanto admiten respectivas parametrizaciones $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ tales que $\gamma_1'(t) = f(\gamma_1(t))$ y $\gamma_2'(t) = f(\gamma_2(t))$, de modo que los vectores normales a Γ_1 y Γ_2 son perpendiculares a f.