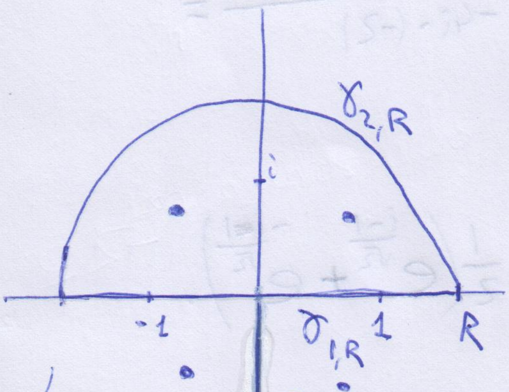
(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{1+x^4} \operatorname{sen} x \, dx$. Para obtener el valor de esta integral, usaremos el teorema de los residuos con la función $f(z) = \frac{z^3}{1+z^4} e^{iz}$.

Como en la recta real, $\operatorname{Re}(e^{iz}) = \cos z$ e $\operatorname{Im}(e^{iz}) = \operatorname{sen} z$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^3}{1+z^4} e^{iz} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^3}{1+z^4} \cos z \, dz + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^3}{1+z^4} \operatorname{sen} z \, dz,$$ (donde ambas integrales son reales) de modo que nuestra integral será $\operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^3}{1+z^4} e^{iz} dz\right) = \operatorname{Im}\left(\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{z^3}{1+z^4} e^{iz} dz\right)$.



En el dibujo se representan los polos de f.

Sean las curvas $\gamma_{1,R} : [-R, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t$.

$\gamma_{2,R} : [0, \pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto Re^{it}$. $\forall R > 100$

La curva $\gamma_R = \gamma_{1,R} \circ \gamma_{2,R}$ es una curva cerrada que encierra un recinto simplemente conexo, en él (y en un entorno suyo), la función f es holomorfa excepto en los puntos $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{i-1}{\sqrt{2}}$, donde tiene polos de grado 1 (ya que

$$f(z) = \frac{z^3 e^{iz}}{\left(z - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(z - \frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)\left(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(z - \frac{-i-1}{\sqrt{2}}\right)}.$$ De modo que podemos aplicar el teorema de los residuos, que nos dice que

$$\int_{\gamma_R} f = 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(f, \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) + \operatorname{Res}\left(f, \frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)\right).$$ Procedemos a calcular estos residuos, por el procedimiento habitual en polos de grado 1: $\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z - z_0)$.

$$\text{Res}\left(f, \frac{i+1}{\sqrt{2}}\right) = \lim_{z \to \frac{i+1}{\sqrt{2}}} \frac{z^3 e^{iz}}{\left(z-\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)\left(z-\frac{-i+1}{\sqrt{2}}\right)\left(z-\frac{-i-1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right)^3 e^{\frac{i-1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}i)(\sqrt{2}(i+1))} =$$

$$= \frac{\frac{i-1}{\sqrt{2}}\cdot e^{\frac{i-1}{\sqrt{2}}}}{2i(i+1)\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{4i}\cdot\frac{i-1}{i+1}\cdot e^{\frac{i-1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{4i}\cdot\frac{(i-1)^2}{-2}\cdot e^{\frac{i-1}{\sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{i}{8}\cdot(-2i)\cdot e^{\frac{i-1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{4} e^{\frac{i-1}{\sqrt{2}}}.$$

$$\text{Res}\left(f, \frac{i-1}{\sqrt{2}}\right) = \lim_{z \to \frac{i-1}{\sqrt{2}}} \frac{z^3 e^{iz}}{\left(z-\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right)\left(z-\frac{-i+1}{\sqrt{2}}\right)\left(z-\frac{-i-1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)^3 \cdot e^{\frac{-i-1}{\sqrt{2}}}}{-\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}i)(\sqrt{2}(i-1))} =$$

$$= \frac{\frac{i+1}{\sqrt{2}}\cdot e^{\frac{-i-1}{\sqrt{2}}}}{-2\sqrt{2}i(i-1)} = \frac{(i+1)\, e^{\frac{-i-1}{\sqrt{2}}}}{-4i\,(i-1)} = \frac{2i\cdot e^{\frac{-i-1}{\sqrt{2}}}}{-4i\cdot(-2)} =$$

$$= \frac{1}{4} e^{\frac{-i-1}{\sqrt{2}}}$$

De modo que $\displaystyle\int_{\gamma_R} f = 2\pi i\left(\frac{1}{4}e^{\frac{i-1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{4}e^{\frac{-i-1}{\sqrt{2}}}\right) = \pi i\cdot\frac{1}{2}\left(e^{\frac{i-1}{\sqrt{2}}} + e^{\frac{-i-1}{\sqrt{2}}}\right).$

$$= \frac{\pi i}{2}\left(e^{\frac{-1}{\sqrt{2}}}\left(e^{\frac{i}{\sqrt{2}}}+e^{\frac{-i}{\sqrt{2}}}\right)\right) = \pi i\cdot e^{\frac{-1}{\sqrt{2}}}\cdot\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Por otra parte, $\forall R$, $\displaystyle\int_{\gamma_R} f = \int_{\gamma_{1,R}} f + \int_{\gamma_{2,R}} f$. Supongamos por un momento que $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_{2,R}} f = 0$ (luego lo probaremos). Entonces, $\forall R>100$, tomando $\lim_{R\to\infty}$,

$$\pi i e^{\frac{-1}{\sqrt{2}}}\cdot\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_{1,R}} f = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x^3}{1+x^4}\cdot e^{ix}\cdot dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3}{1+x^4}\cdot e^{ix}dx.$$ Tomando

partes imaginarias, obtenemos lo que buscábamos: $\displaystyle\pi\cdot e^{\frac{-1}{\sqrt{2}}}\cdot\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3}{1+x^4}\cdot \text{sen}\, x\cdot dx.$

Veamos ahora que, efectivamente, $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{2,R}} f = 0$: $\left(\gamma_{2,R}:[0,\pi]\to\mathbb{C},\ t\mapsto Re^{it}\right)$.

$$\left|\int_{\gamma_{2,R}} f\right| \le \int_0^\pi \left|\frac{R^3e^{3it}}{1+R^4e^{4it}}\right|\cdot\left|e^{iRe^{it}}\right|\cdot|iRe^{it}|\cdot dt \overset{(1)}{\le} \int_0^\pi \frac{R^3}{R^4-1}\cdot\left|e^{iR\cos t - R\operatorname{sen} t}\right|\cdot R\cdot dt \le$$

(1): Acotamos el denominador por debajo con la desigualdad triangular.

$$\le \frac{R^4}{R^4-1}\int_0^\pi e^{-R\operatorname{sen}t}\,dt \overset{(2)}{\le} \frac{R^4}{R^4-1}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\operatorname{sen}t}\,dt \overset{(3)}{\le}\frac{R^4}{R^4-1}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\cdot\frac{2t}{\pi}} =$$

(2). Aquí usamos $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\ \forall t$.

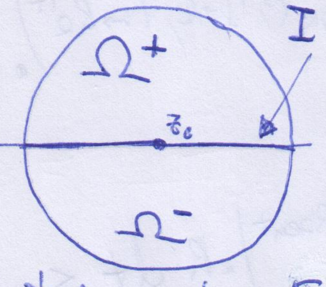
(3) En $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $-\operatorname{sen} t \le -\frac{2t}{\pi}$, ya que el seno es ~~cónico~~ cóncavo.

$$= \frac{R^4}{R^4-1}\cdot 2\cdot\left[\frac{e^{-R\frac{2t}{\pi}}}{-\frac{2R}{\pi}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-R^4\pi}{R(R^4-1)}\left(e^{-R}-1\right)\xrightarrow{R\to\infty} 0,$$ como queríamos.

(2) 1 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ continua, f holomorfa en $\{x+iy,\ xy\neq 0\}$. Entonces f es holomorfa en $\mathbb{C}$.

Comenzamos afirmando que nos basta ver que f es holomorfa en todo punto excepto 0. En efecto, si pasa esto, como $f|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$ está acotada en un entorno de 0, ya que f es continua en 0, y la singularidad de $f|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$ en 0 es aislada, $f|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$ tendría una singularidad evitable en 0, y se podría extender a 0 por una función holomorfa g. Pero $g=f$ porque ambas son continuas en 0 y coinciden en el resto de puntos, por tanto f holomorfa en 0.

Ahora, sea un punto con $xy=0$ pero distinto de 0, z_0. Podemos coger un disco, $D(z_0,r_0)$, tal que f holomorfa en $D(z_0,r_0)$ salvo por



I una recta, que pasa por z_0. De modo que $D(z_0,r_0)$ es simétrico respecto a la recta, y además la función f es holomorfa encima de la recta, debajo y continua en todo punto. Luego, por el principio de simetría aplicado a las funciones $f|_{\Omega^+\cup I}$ y $f|_{\Omega^-\cup I}$ (ver dibujo), f es holomorfa en todo el disco, en concreto es holomorfa en z_0. Por lo que dijimos al principio, ya hemos acabado.

1.5

③ $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ holomorfa, $f(f(\frac{1}{n}))=\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. O bien $f(z)=z$ $\forall z$ o bien existe un número complejo ω t.q. $f(z)=\omega-z$ $\forall z$.

Si $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ es holomorfa, $f\circ f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ también lo es. Y también lo es la función $g: z\mapsto f\circ f(z)-z$. Esta función cumple que $g(\frac{1}{n})=0$ $\forall n$ (por continuidad también $g(0)=0$). Por tanto, por el principio de identidad, $g=0$. Dicho de otra manera, $f\circ f=Id_{\mathbb{C}}$, o, $f=f^{-1}$. Esto prueba, claro, que f es un difeomorfismo, por tanto no puede haber ningún z con $f'(z)=0$! (Ya que $(f\circ f)'(z)=f'(f(z))\cdot f'(z)=1$ $\forall z$) Esto descarta que f sea un polinomio de grado ≥ 2. Ahora bien, como f es entera, f viene dada por su desarrollo en potencias en 0, $f(z)=\sum^{\infty} a_n z^n$. Si hubiera infinitos términos a_n distintos de 0, f tendría una singularidad esencial en ∞. Esto significa que habría una sucesión $z_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, tales que $f(z_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, por el teorema de Casoratti-Weierstrass. Llamando $y_n = f(z_n)$,

Tenemos una sucesión $y_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ tal que $f(y_n) = f(f(z_n)) = z_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

Esto es absurdo ya que f es continua en 0.

Hemos descartado, por tanto: $\begin{cases} \text{Que haya infinitos } a_n \text{ no nulos.} \\ \text{Que } f \text{ sea un polinomio de grado } \geq 2. \end{cases}$

Sólo nos queda la opción de que f sea un polinomio de grado 1 o 0, $f(z) = az + b$. En ese caso, $f \circ f(z) = a(az+b)+b = a^2 z + ab + b$.

Como $f \circ f = Id_{\mathbb{C}}$, $\begin{cases} a^2 = 1 \\ ab+b = 0 \end{cases}$, ya que $a^2 z + (ab+b) = z \ \forall z \in \mathbb{C}$.

Dos opciones:

$* a=1$; $ab+b=0 \Rightarrow 2b=0 \Rightarrow b=0$. $f(z) = z$.

$* a=-1$; $ab+b = -b+b = 0$; $f(z) = -z+b$. Esto demuestra lo que dice el enunciado (podemos comprobar, además, que todas estas funciones cumplen $f \circ f = Id_{\mathbb{C}}$, y por tanto cumplen el enunciado).

1.5

4) (u_n) armónicas convergen uniformemente a u sobre cada compacto.

Demostrar que u es armónica en Ω.

Recordemos el resultado de que una función $u: \Omega \to \mathbb{R}$ es armónica en Ω si y sólo si $\forall z_0 \in \Omega$, $\forall r$ t.q. $\overline{D(z_0, r)} \subseteq \Omega$, se cumple la propiedad del valor medio: $u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})\,dt$ (donde identificamos $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$).

Usando esta propiedad, el enunciado es bastante directo, ya que dados $z_0 \in \Omega$, r t.q. $\overline{D(z_0,r)} \subseteq \Omega$, como $\overline{D(z_0,r)}$ es compacto, se cumple que u_n converge a u uniformemente en $\overline{D(z_0,r)}$, por tanto:

$$u(z_0) = \lim_{n\to\infty} u_n(z_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(z_0 + re^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} u_n(z_0 + re^{it})\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})\,dt$$

Ahí usamos convergencia uniforme en $\partial D(z_0,r)$ de u_n a u.

. Como esto se cumple $\forall z_0 \in \Omega$, $\forall r > 0$ tal que $\overline{D(z_0,r)} \subseteq \Omega$, por lo antes dicho, u es armónica.