1
$$\begin{cases} x' = (2-y)xy \\ y' = (x-2)y^2 \end{cases}$$

$$f(x,y) = \left((2-y)xy\,,\ (x-2)y^2\right)$$

$$f(x,y) = (0,0) \iff \left\{\begin{array}{l} (2-y)xy = 0 \\ (x-2)y^2 = 0 \end{array}\right\} \iff (x,y) \in \{y=0\} \cup \{(2,2)\}$$

La recta $\{y=0\}$ consta de puntos de equilibrio. El único equilibrio fuera de esta recta es el punto $(2,2)$.
Fuera de la recta $\{y=0\}$ podemos hacer dos reparametrizaciones del sistema (una en cada semiplano) que facilitarán su estudio. Más concretamente: consideremos la función $p(x,y) = y$. Entonces $f(x,y) = p(x,y)\, g(x,y)$, donde $g(x,y) \doteq \left((2-y)x\,,\ (x-2)y\right)$.
Como $p(x,y) > 0$ en $\{y>0\}$ y $p(x,y) < 0$ en $\{y<0\}$, el diagrama de fases de f será el mismo esencialmente que el de g en $\{y>0\}$ (con las curvas recorridas a diferente velocidad pero con la misma orientación), y será esencialmente el mismo que el de g en $\{y<0\}$, con la salvedad de que en este segundo caso las curvas cambiarán de orientación.
Por tanto podemos reducir el estudio del sistema $(x',y') = f(x,y)$ al del sistema $(x',y') = g(x,y)$, que es algo más sencillo, con la precaución de cambiar la orientación de sus curvas integrales en el semiplano inferior $\{y<0\}$.
El sistema $(x',y') = g(x,y)$, es decir,
$$\begin{cases} x' = (2-y)x \\ y' = (x-2)y \end{cases}$$
es un caso particular del sistema clásico de Lotka-Volterra que estudiamos en clase en un problema. Recordemos que g tiene una integral primera del tipo
$$H(x,y) = F(x) + G(y).$$
Vamos a hallar F y G adecuadas de forma que $\langle \nabla H, g\rangle = 0$:

$$H(x,y) = F(x) + G(y) \Rightarrow \nabla H(x,y) = \left(F'(x),\ G'(y)\right) \Rightarrow$$

$$\langle \nabla H, g\rangle (x,y) = F'(x)(2-y)x + G'(y)(x-2)y .$$

Para que $\langle \nabla H, g\rangle = 0$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{xy=0\}$ basta por tanto que $F'(x) = \dfrac{x-2}{x}$, $G'(y) = -\dfrac{2-y}{y}$,

es decir $F'(x) = 1 - 2/x$; $G'(y) = 1 - 2/y$.

Luego basta tomar
$$F(x) = x - 2\log|x| = x - \log(x^2)$$
$$G(y) = y - 2\log|y| = y - \log(y^2)$$

$$H(x,y) = x + y - \log(x^2y^2) \ ; \ (x,y) \in \{xy \neq 0\}.$$

Ahora se trata de estudiar las curvas de nivel de H, que contendrán (y en muchos casos coincidirán con) las curvas integrales del campo g. Obsérvese que la función H es <u>convexa</u> en cada cuadrante del plano (aunque obviamente no lo es en todo el plano porque ni siquiera está definida en todo $\mathbb{R}^2$ ni puede definirse en $\{xy=0\}$ de forma continua), ya que

$$D^2H(x,y) = \begin{pmatrix} F''(x) & 0 \\ 0 & G''(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/x^2 & 0 \\ 0 & 2/y^2 \end{pmatrix}$$

es definida positiva en cada cuadrante.

Estudiaremos las curvas de nivel de H en cada cuadrante:

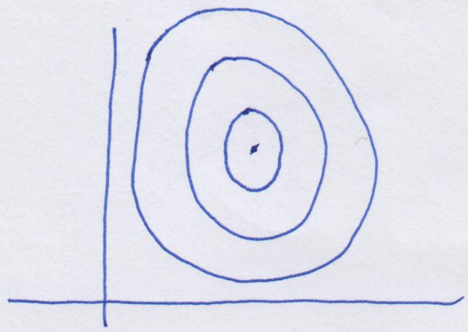
<u>Primer cuadrante</u> $(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0, y>0\})$: La función H tiene un mínimo en $(2,2)$; de hecho un mínimo absoluto en el 1er cuadrante, y además $\lim\limits_{x\to 0^+} H(x,y) = \infty = \lim\limits_{y\to 0^+} H(x,y) = \lim\limits_{x\to +\infty} H(x,y) = \lim\limits_{y\to +\infty} H(x,y)$. Como vimos en un problema en clase, esto implica que los conjuntos de nivel de H ~~en~~ el 1er cuadrante son:

$\{H=c\} = \emptyset$, si $c < H(2,2)$

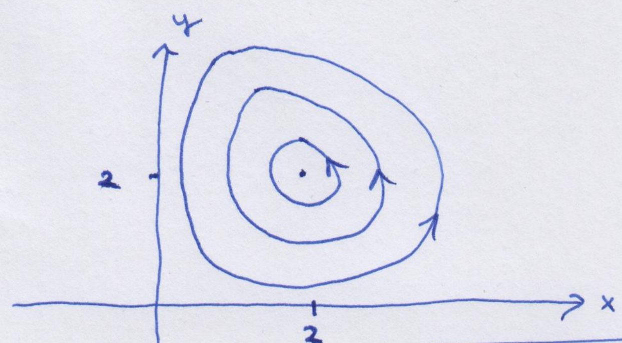
$\{H=c\} = \{(2,2)\}$, si $c = H(2,2)$

$\{H=c\}$ es una curva cerrada simple cuya región interior es un convexo acotado con interior no vacío, si ~~...~~ $c > H(2,2)$.

Por tanto, los conjuntos de nivel de H en el 1er cuadrante son aproximadamente de esta forma



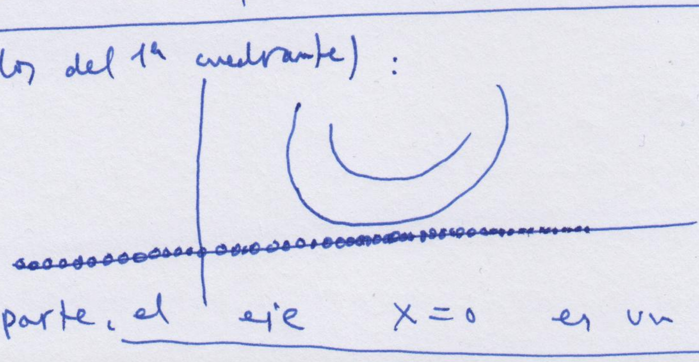
Fuera del equilibrio $(2,2)$, al tratarse de curvas cerradas simples que no contienen puntos de equilibrio, sabemos por una proposición vista en clase que estas curvas de nivel coinciden con las órbitas de g. Por tanto (mirando la dirección del campo g en un pto del 1er cuadrante diferente de $(2,2)$) concluimos que el diagrama de fases del campo g en el 1er cuadrante es aproximadamente así:



En particular vemos que $(2,2)$ es un equilibrio estable pero no asintóticamente estable.

Antes de pasar a estudiar las curvas de nivel de H en los otros cuadrantes, veamos qué ocurre en los ejes $x=0$ e $y=0$ para el sistema original $(x', y') = f(x,y)$.

Como hemos observado antes, el eje $y=0$ consta de puntos de equilibrio, que (por lo que hemos visto en el 1er cuadrante que ocurre) necesariamente son inestables (al menos los del 1er cuadrante):



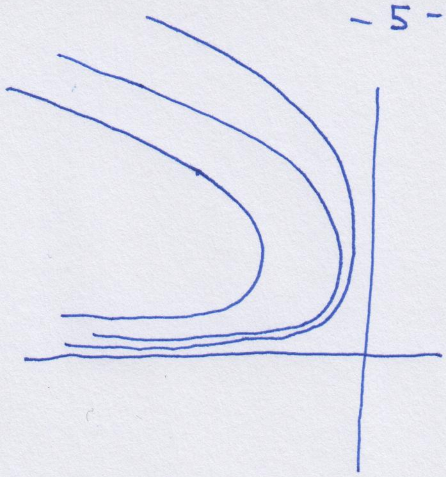
Por otra parte, el eje $x=0$ es un conjunto invariante: en efecto, si hacemos $x=0$ y observamos la ecuación 2ª de g, $y'=-2y$, que se resuelve fácilmente al ser de variables separadas, llegamos a la conclusión de que, para cualquier $y_0\in\mathbb{R}$, $x_0=0$, la solución de

$$\begin{cases}(x',y')=g(x,y)\\(x(0),y(0))=(x_0,y_0)=(0,y_0)\end{cases}$$

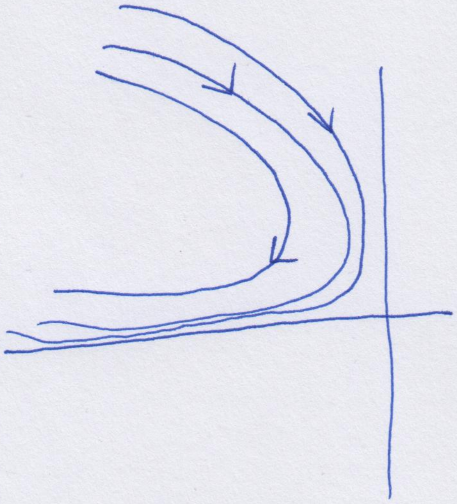
es $(x(t),y(t))=(0,\ y_0e^{-2t})$. Por tanto, en la recta $x=0$ el diagrama de fases (de g) es así

y por tanto el de f también tiene este aspecto al restringirlo a esta recta, con la salvedad de que las órbitas del semiplano inferior cambian su orientación. Es decir, en el eje $x=0$ el diagrama de fases de f es aproximadamente así:

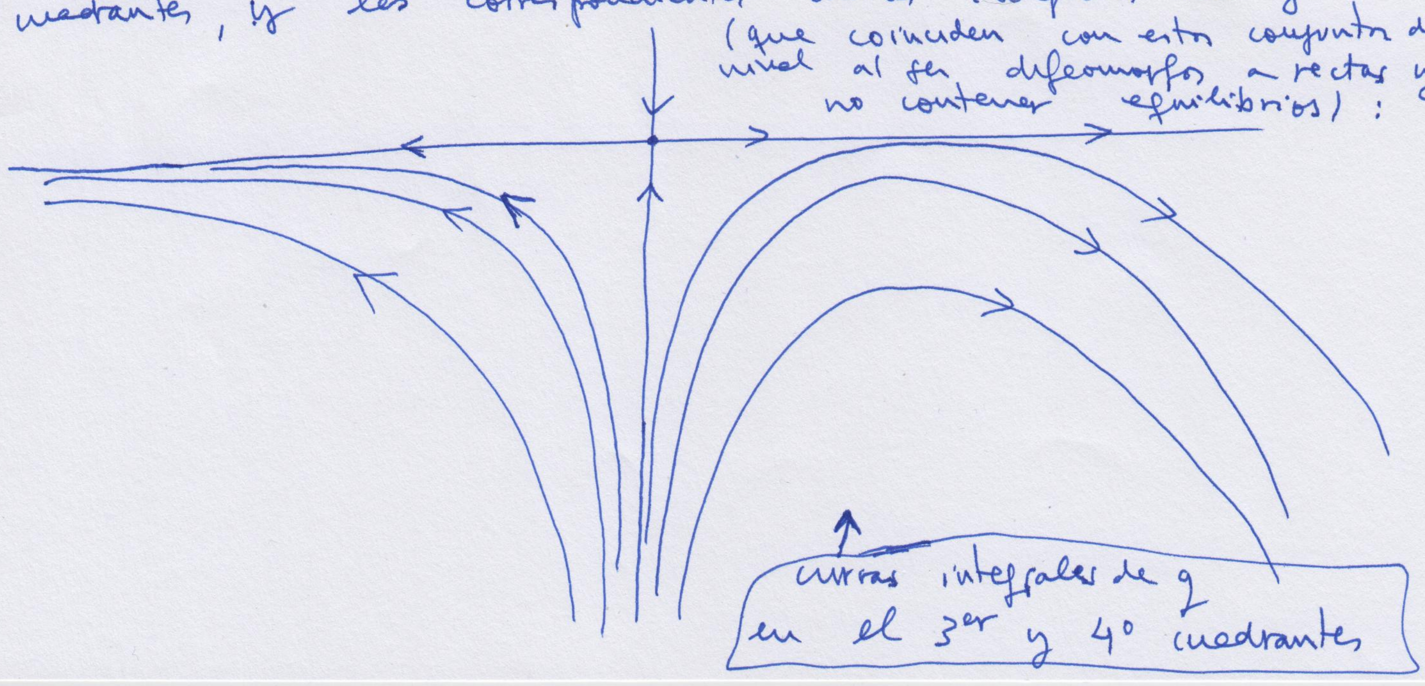
Segundo cuadrante ($\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x<0,\ y>0\}$): En esta región convexa la función convexa H no tiene ningún mínimo, y de hecho se cumple que $\lim_{x\to-\infty} H(x,y)=-\infty$, $\lim_{x\to 0^-} H(x,y)=+\infty$ para cada $y>0$. Esto implica que las curvas de nivel de H en este cuadrante son fronteras de convexos abiertos no acotados del segundo cuadrante. Tales fronteras son necesariamente curvas de nivel inyectivas, al no estar acotadas y no haber equilibrios en el 2º cuadrante. También se tiene que $\lim_{y\to 0^+} H(x,y)=+\infty$ para cualquier $x<0$. Luego los conjuntos de nivel de la forma $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x<0,\ y>0,\ H(x,y)\le c\}$ o bien son vacíos o bien tienen este aspecto:



y las curvas integrales de g (y por tanto de f) en el 2º cuadrante son más o menos así:

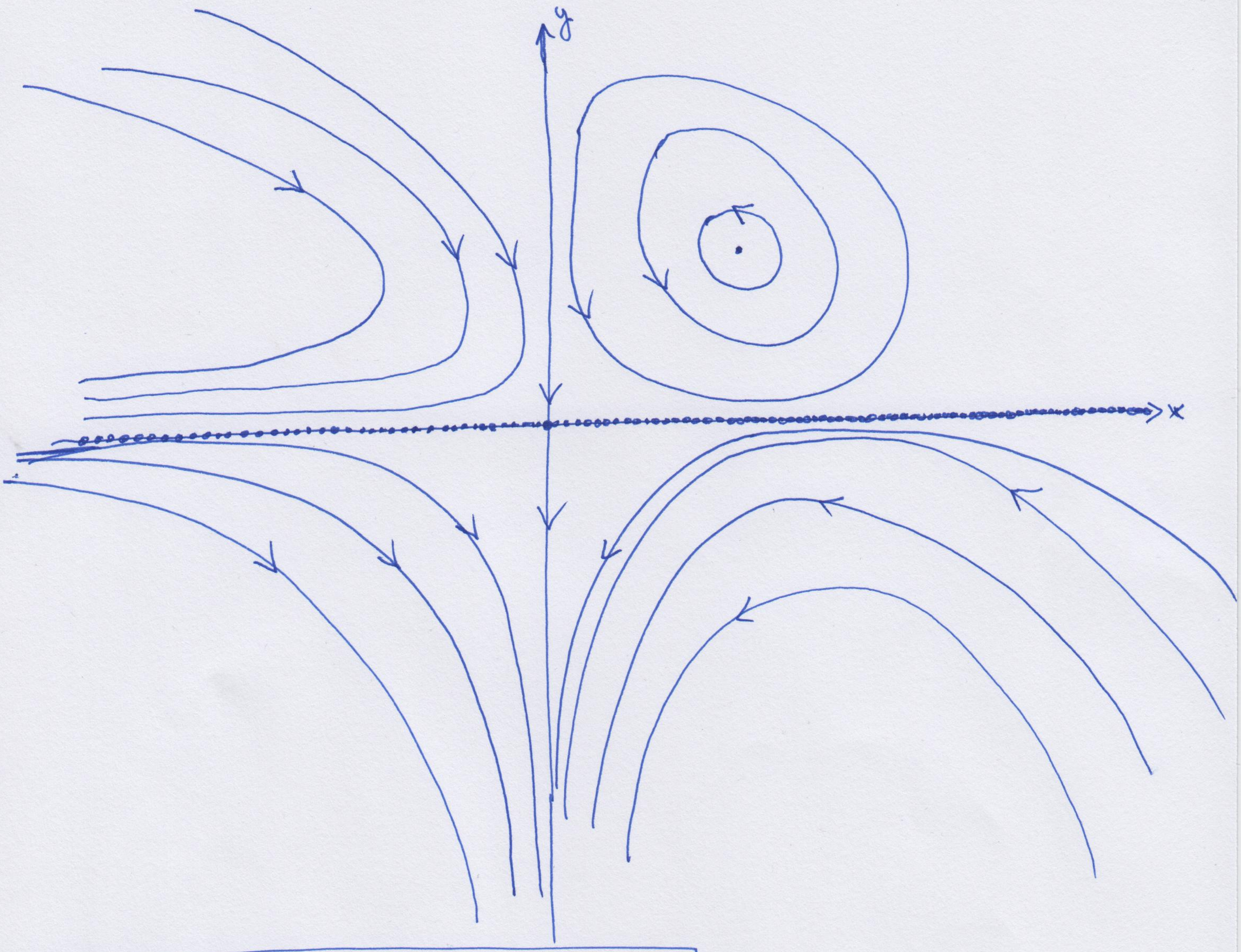


Tercer y cuarto cuadrantes: Un estudio similar al realizado en el segundo cuadrante, teniendo en cuenta la convexidad de H y los límites $\lim_{x\to 0^\pm} H(x,y)$, $\lim_{y\to 0^-} H(x,y)$, $\lim_{x\to -\infty} H(x,y)$, $\lim_{y\to -\infty} H(x,y)$, $\lim_{x\to +\infty} H(x,y)$, nos permite esbozar los conjuntos de nivel de H en estos cuadrantes, y las correspondientes curvas integrales de g (que coinciden con estos conjuntos de nivel al ser difeomorfos a rectas y no contener equilibrios):



Pero recordemos que en el 3^{er} y 4^{o} cuadrante (o sea el semiplano $\{y<0\}$) las curvas integrales de f tienen la orientación inversa de las de g.

Juntando toda la información que hemos obtenido, podemos hacer ya un esbozo general del diagrama de fases de f:



Las conclusiones más importantes son:

- El punto $(2,2)$ es estable pero no asintóticamente estable.
- Todas las órbitas del 1^{er} cuadrante son periódicas, y además no constantes, excepto el equilibrio $(2,2)$
- Todos los puntos de la recta $\{y=0\}$ son equilibrios inestables.

2

Sea $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 con $\theta(0) = 0 = \theta'(0)$ y $|\theta(t)| \leq 1/2$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Usando las técnicas habituales aprendidas en primero, es fácil ver que $t \longmapsto \theta(|t|)$ también es de clase C^1, y por tanto

$$f(x,y) = \big(y,\ y(1-x^2-y^2) - x^5 + y\,\theta(|y|)\,\theta(|x|)\big)$$

es un campo de clase C^1 de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Queremos probar que el sistema $(x', y') = f(x,y)$ tiene al menos una órbita periódica no constante, y estudiar la estabilidad de su equilibrio $(0,0)$ (que claramente es el único punto no regular).

Consideremos la función $V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, \infty)$ definida por

$$V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^6.$$

Se tiene que

$$\langle \nabla V, f \rangle (x,y) = y^2\big(1 - x^2 - y^2 + \theta(|y|)\,\theta(|x|)\big).$$

Notemos que, puesto que $\big|\theta(|x|)\,\theta(|y|)\big| \leq 1/4 \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(*)\begin{cases} \langle \nabla V, f \rangle (x,y) \leq 0 & \text{si } x^2+y^2 \geq 2 \\ \langle \nabla V, f \rangle (x,y) \geq 0 & \text{si } x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Queremos encontrar dos constantes $a, A > 0$ tales que $\boxed{K_{a,A} \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq V(x,y) \leq A\}}$ sea positivamente invariante. Como este tipo de conjunto es trivialmente compacto y no contiene a $(0,0)$ (que es el único equilibrio del sistema), podremos entonces aplicar el teorema de Poincaré–Bendixson para concluir que $K_{a,A}$ contiene una órbita periódica no constante.

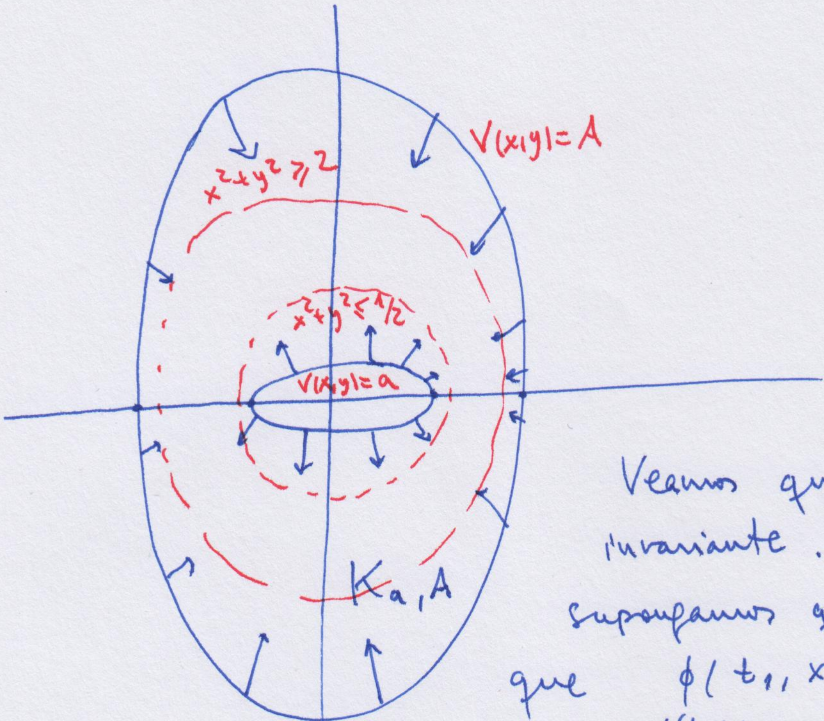
Teniendo en cuenta $(*)$, nos conviene encontrar $a, A > 0$ tales que

$$(**)\begin{cases} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : V(x,y) \geq A\} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus B(0, \sqrt{2}) \\ \text{y } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : V(x,y) \leq a\} \subseteq B(0, \frac{1}{\sqrt{2}}). \end{cases}$$

Por ejemplo podemos tomar $a = 6^{-1} 4^{-3}$,

$$A = (8/6) + 1$$

y se cumple (**) para estos números.



Veamos que $K_{a,A}$ es positivamente invariante. Dado $(x,y) \in K_{a,A}$, supongamos que existiera $t_1 > 0$ tal que $\phi(t_1, x, y) \notin K_{a,A}$. Entonces

- o bien $V(\phi(t_1, x, y)) > A$
- o bien $V(\phi(t_1, x, y)) < a$.

Supongamos que $V(\phi(t_1, x, y)) > A$. Por el teorema de Bolzano aplicado a la función $g(t) = V(\phi(t, x, y))$, existe algún $s \in [0, t_1)$ tal que $g(s) = A$, y podemos tomar $t_0 \doteq \sup\{s \in [0, t_1) : g(s) = A\}$. Por definición de t_0 se tendrá $t_0 < t_1$, $g(t_0) = A$ (ya que g es continua), y $g(t) > A$ si $t \in (t_0, t_1)$ (de lo contrario, otra vez por el teorema de Bolzano encontraríamos $s \in (t_0, t_1)$ con $g(s) = A$, contradiciendo la definición de supremo). Entonces, por el teorema del valor medio $\exists\, t_2 \in (t_0, t_1)$ t.q.

$$\begin{array}{l} g'(t_2) = \dfrac{g(t_1) - g(t_0)}{t_1 - t_0} > \dfrac{A - A}{t_1 - t_0} = 0 \\ \quad \big\| \\ \langle \nabla V(\phi(t_2, x, y)), f(\phi(t_2, x, y)) \rangle \le 0 \end{array}$$

$$\Uparrow \left(\begin{array}{c} g(t_2) > A \underset{(**)}{\Rightarrow} \phi(t_2, x, y) \notin B(0, \sqrt{2}) \\ \Downarrow (*) \\ \langle \nabla V, f \rangle (\phi(t_2, x, y)) \le 0 \end{array} \right.$$

O sea $0 < g'(t_2) \le 0$,

lo cual es absurdo.

Por tanto debe tenerse $V(\phi(t,x,y)) \leq A$ para todo $t \geq 0$.
Análogamente se prueba que $V(\phi(t,x,y)) \geq a$ $\forall t \geq 0$.
Luego en efecto $K_{a,A}$ es positivamente invariante, y esto concluye la prueba de la existencia de una órbita periódica regular.

Estudiemos por último la estabilidad del equilibrio $(0,0)$.

Hemos visto que el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : V(x,y) \geq a\}$ es positivamente invariante para el campo f, lo cual significa que su complementario $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : V(x,y) < a\}$ es positivamente invariante para el campo opuesto $-f$. Como la adherencia de un conjunto positivamente invariante es positivamente invariante (problema 8.28), se tiene que $U_a := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : V(x,y) \leq a\}$ es un entorno compacto de $(0,0)$, positivamente invariante, en el que $\langle \nabla V, -f \rangle \leq 0$, $V^{-1}(0) = \{(0,0)\}$, y V no es constante sobre ninguna órbita de $-f$ contenida en $U_a \setminus \{(0,0)\}$ (ya que $\langle \nabla V, -f \rangle(x,y) = 0 \iff y = 0$ para todo $(x,y) \in U_a$, y no hay ninguna órbita de $-f$ contenida en la recta $\{y=0\}$ que no sea la constante $(0,0)$, porque $y(t) \equiv 0 \Rightarrow 0 = y'(t) = +x(t)^5 \neq 0$ si $(x(t),y(t))$ no es la solución trivial y está contenida en $\{y=0\}$). Entonces por el teorema de Krasovskii-La Salle, se concluye que $(0,0)$ es asintóticamente estable para el campo $-f$, lo cual quiere decir que $(0,0)$ es un equilibrio inestable para f, y de hecho es un surtidor no lineal.