Capítulo 1

Funciones integrables en $\mathbb{R}^n$

Sean A un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Sea $R = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ un rectángulo que contenga a A. Siempre puede suponerse que f está definida en todo el rectángulo R, extendiéndola si es necesario por $f(x) = 0$ para $x \in R \setminus A$. Sea P una partición de R obtenida mediante el procedimiento de dividir cada intervalo $[a_i, b_i]$ en $m_i + 1$ puntos $t_0^i = a_i < t_1^i < ... < t_{m_i}^i = b_i$ y formar los $m_1 m_2 ... m_n$ subrectángulos

$$R_\alpha = [t_{j_1}^1, t_{j_1+1}^1] \times ... \times [t_{j_n}^n, t_{j_n+1}^n],$$

donde $\alpha = (j_1, j_2, ..., j_n)$, con $0 \leq j_i \leq m_i$, y $1 \leq i \leq n$. En lo sucesivo, siempre consideraremos particiones de rectángulos obtenidas de esta manera.

Nótese que P podría definirse como

$$P = P^1 \times ... \times P^n := \{I_{j_1}^1 \times ... \times I_{j_n} : 0 \leq j_k \leq m_k, 1 \leq k \leq n\},$$

donde $I_j^i = [t_j^i, t_{j+1}^i]$, y cada $P^i = \{I_j^i : 0 \leq j \leq m_i\}$ es una partición del lado $[a_i, b_i]$ del rectángulo R.

Definimos el volumen de un rectángulo $R = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ como el producto de las longitudes de sus lados,

$$v(R) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)...(b_n - a_n).$$

Observación 1.1 Si P es una partición de un rectángulo R, entonces

$$v(R) = \sum_{Q \in P} v(Q).$$

Como f está acotada en R, podemos considerar el supremo y el ínfimo de f sobre cada subrectángulo Q de una partición P de R, y denotamos

$$m(f, Q) = \text{ínf}\{f(x) : x \in Q\}, \qquad M(f, Q) = \sup\{f(x) : x \in Q\}.$$

Dada una partición P de R se define la *suma inferior* de f para P como

$$L(f,P)=\sum_{Q\in P} m(f,Q)v(Q),$$

donde la suma se hace sobre todos los subrectángulos Q de la partición P, y análogamente se define

$$U(f,P)=\sum_{Q\in P} M(f,Q)v(Q)$$

como la *suma superior* de f para P.

Observación 1.2 Para toda partición P se tiene que $L(f,P)\leq U(f,P)$.

Sean P y P' particiones de un rectángulo R. Se dice que P' es más fina que P (y escribiremos $P'\geq P$) si cada subrectángulo de P' está contenido en algún subrectángulo de P. Esto equivale a decir que todo subrectángulo de P tiene una partición formada por subrectángulos de P'.

Lema 1.3 Si P' es más fina que P entonces

$$L(f,P)\leq L(f,P'),\qquad \text{mientras que}\qquad U(f,P)\geq U(f,P').$$

La demostración de este lema se deja como ejercicio. Basta notar que el ínfimo de f sobre un rectángulo es menor o igual que el ínfimo de f sobre cualquier subrectángulo suyo, y utilizar la observación 1.1.

Estos hechos tienen como consecuencia el siguiente

Lema 1.4 *Si P_1 y P_2 son particiones cualesquiera de un rectángulo R, entonces*

$$L(f,P_1)\leq U(f,P_2),$$

es decir, cualquier suma inferior es menor o igual que cualquier otra suma superior.

Demostración: De acuerdo con las observaciones anteriores, si tomamos una partición P más fina que P_1 y que P_2 (esto siempre puede hacerse; ¿por qué?), se tiene que

$$L(f,P_1)\leq L(f,P)\leq U(f,P)\leq U(f,P_2).\ \square$$

Por consiguiente, el conjunto de todas las sumas inferiores está acotado superiormente, y tiene un supremo,

$$s=\sup\{L(f,P): P\,\text{partición de}\,R\}.$$

Análogamente, el conjunto de todas las sumas superiores está acotado inferiormente, luego tiene un ínfimo,

$$S = \text{ínf}\{U(f,P) : P \,\text{partición de}\, R\}.$$

Por el lema anterior, es claro que $s \leq S$. Al número s se le llama *integral inferior* de f en A, y a S se le llama *integral superior* de f en A. Denotaremos estos números por

$$s = \underline{\int}_A f, \qquad \text{y}\, S = \overline{\int}_A f.$$

Definición 1.5 Si $S = s$ se dice que f es integrable (en el sentido de Riemann), y se define la integral de f sobre A como

$$\int_A f = \sup\{L(f,P) : P \,\text{partición de}\, R\} = \text{ínf}\{U(f,P) : P \,\text{partición de}\, R\}.$$

Observación 1.6 Si f es integrable en A entonces, según la definición,

$$L(f,P) \leq \int_A f \leq U(f,P)$$

para toda partición P de R, y además $\int_A f$ es el *único* número con esta propiedad. Es decir, si $L(f,P) \leq \alpha \leq U(f,P)$ para toda partición P de R y f es integrable, entonces $\alpha = \int_A f$.

Notación La integral $\int_A f$ suele denotarse también por $\int_A f(x)dx$, o incluso $\int ... \int_A f(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n$. Si $A = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $\int_A f$ suele escribirse como $\int_a^b f$, o $\int_a^b f(x)dx$.

Es fácil comprobar que la definición de integral no depende del rectángulo $R \supset A$ considerado (de hecho, si R y R' son rectángulos que contienen a A entonces

$$\text{ínf}\{U(f,P) : P \text{ partición de } R\} = \text{ínf}\{U(f,P') : P' \text{ partición de } R'\},$$

y análogamente para la integral inferior).

A continuación damos un ejemplo de una función que es integrable, y otro de una función que no lo es; se deja al cuidado del lector la demostración de lo que se afirma.

Ejemplo 1.7 Sea $f(x) = c$ una función constante definida sobre un rectángulo A de $\mathbb{R}^n$. Entonces f es integrable, y

$$\int_A f = c \cdot v(A).$$

Ejemplo 1.8 Sea A un rectángulo de $\mathbb{R}^2$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces f no es integrable en A.

Para poder considerar más ejemplos y establecer las propiedades elementales de la integral necesitaremos los dos teoremas siguientes. El primero es un sencillo criterio de integrabilidad.

Teorema 1.9 (Criterio de integrabilidad de Riemann) *Sea A un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$, R un rectángulo que contiene a A, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada (que se extiende a R poniendo $f = 0$ en $R \setminus A$). Entonces, f es integrable si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición $P = P_\varepsilon$ de R tal que*

$$U(f, P) - L(f, P) \leq \varepsilon.$$

Demostración: Veamos primero que si f es integrable entonces satisface la condición de Riemann. Dado $\varepsilon > 0$, en vista de la definición de $\int_A f$ y de las propiedades de los supremos e ínfimos, existen particiones P_1 y P_2 de R tales que

$$U(f, P_1) - \int_A f \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \int_A f - L(f, P_2) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

y por tanto, tomando una partición P más fina que P_1 y que P_2, según el lema 1.3, se tiene

$$U(f, P) - \int_A f \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \int_A f - L(f, P) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

lo que, sumando ambas desigualdades, nos dice que

$$U(f, P) - L(f, P) \leq \varepsilon.$$

Recíprocamente, supongamos que f satisface la condición de Riemann. Sean S y s las integrales superior e inferior de f en A. Siempre es verdad que

$$L(f, P) \leq s \leq S \leq U(f, P)$$

para toda partición P de R. Veamos que ha de ser $S = s$ y por tanto f es integrable. Bastará probar que $S - s \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Pero esto es obvio a partir de la desigualdad anterior y de la condición de Riemann: dado $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε tal que $U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) \leq \varepsilon$, y por tanto

$$S - s \leq U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) \leq \varepsilon. \ \Box$$

El siguiente resultado caracteriza la integrabilidad de una función en términos del comportamiento de sus *sumas de Riemann*, y nos será muy útil más adelante para establecer ciertas propiedades de la integral (por ejemplo, que la suma de funciones integrables es integrable).

Teorema 1.10 (de Darboux) *En las mismas condiciones que el teorema anterior, f es integrable en A, con integral I, si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier partición P de R en subrectángulos $Q_1, ..., Q_N$ cuyos lados sean menores o iguales que δ, y para cualesquiera $x_1 \in Q_1, ..., x_N \in Q_N$, se tiene que*

$$|\sum_{j=1}^{N} f(x_j)v(Q_j) - I| \leq \varepsilon.$$

De $\sum_{j=1}^{N} f(x_j)v(Q_j)$ se dice que es una suma de Riemann para f asociada a la partición P.

Demostración: En primer lugar veamos que si f satisface la condición de Darboux entonces es integrable, con integral I. Sean S y s las integrales superior e inferior de f respectivamente. Basta probar que $S = s = I$, o lo que es lo mismo, $I \leq s \leq S \leq I$. Veamos por ejemplo que $S \leq I$ (el caso $I \leq s$ se trata análogamente). A tal fin, es suficiente demostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe una partición P de R tal que

$$|U(f, P) - I| \leq \varepsilon,$$

y por tanto $S \leq U(f, P) \leq I + \varepsilon$. Fijado $\varepsilon > 0$, elijamos $\delta > 0$ tal que si P es una partición de R en subrectángulos $Q_1, ..., Q_N$ cuyos lados son menores o iguales que δ, y $x_1 \in Q_1, ..., x_N \in Q_N$, entonces

$$|\sum_{j=1}^{N} f(x_j)v(Q_j) - I| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por supuesto, podemos escoger los x_j de modo que

$$|M(f, Q_j) - f(x_j)| \leq \frac{\varepsilon}{v(Q_j)2N},$$

luego

$$|U(f,P)-\sum_{j=1}^{N}f(x_j)v(Q_j)|\leq\sum_{j=1}^{N}\frac{\varepsilon}{v(Q_j)2N}v(Q_j)=\frac{\varepsilon}{2},$$

y por tanto

$$|U(f,P)-I|\leq|U(f,P)-\sum_{j=1}^{N}f(x_j)v(Q_j)|+|\sum_{j=1}^{N}f(x_j)v(Q_j)-I|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

que es lo que queríamos probar.

Recíprocamente, supongamos que f es integrable, sea $I=\int_A f$, y veamos que satisface la condición de Darboux. Para ello utilizaremos la siguiente propiedad, cuya demostración no es difícil y se deja como ejercicio para el lector (ver problemas 1.14 y 1.15): dados un rectángulo R de $\mathbb{R}^n$, una partición P de R y $\varepsilon>0$, existe un $\delta>0$ tal que si P' es cualquier partición de R en subrectángulos cuyos lados son menores o iguales que δ, entonces la suma de los volúmenes de los subrectángulos de P' que no están contenidos en algún subrectángulo de P es menor o igual que ε.

Como f es acotada, existe $M>0$ tal que $|f(x)|\leq M$ para todo $x\in R$. Al ser f integrable, existen particiones P_1 y P_2 de R tales que $I-L(f,P_1)\leq\varepsilon/2$ y $U(f,P_2)-I\leq\varepsilon/2$. Sea P una partición más fina que P_1 y que P_2. Entonces $I-L(f,P)\leq\varepsilon/2$ y $U(f,P)-I\leq\varepsilon/2$. Por la propiedad mencionada antes, existe un $\delta>0$ tal que para toda partición P' de R en subrectángulos cuyos lados son menores o iguales que δ, entonces la suma de los volúmenes de los subrectángulos de P' que no están contenidos en algún subrectángulo de P es menor o igual que $\varepsilon/2M$. Sea $P'=\{Q_1,...,Q_N\}$ una partición de R en subrectángulos cuyos lados son menores o iguales que δ. Denotemos (si es preciso reordenando los subrectángulos de la partición) por $Q_1,...,Q_K$ los subrectángulos de P' que están contenidos en algún subrectángulo de P, y sean $Q_{K+1},...,Q_N$ el resto. Entonces, para cualesquiera $x_j\in Q_j$, $j=1,...,N$, se tiene que

$$\sum_{j=1}^{N}f(x_j)v(Q_j)=\sum_{j=1}^{K}f(x_j)v(Q_j)+\sum_{j=K+1}^{N}f(x_j)v(Q_j)\leq$$
$$U(f,P)+M\frac{\varepsilon}{2M}=U(f,P)+\frac{\varepsilon}{2}\leq I+\varepsilon.$$

Análogamente se ve que

$$\sum_{j=1}^{N}f(x_j)v(Q_j)\geq L(f,P)-\frac{\varepsilon}{2}\geq I-\varepsilon.$$

Juntando estas dos desigualdades obtenemos lo que queríamos:

$$|\sum_{j=1}^{N} f(x_j)v(Q_j) - I| \leq \varepsilon. \ \square$$

El criterio de integrabilidad de Riemann permite deducir fácilmentemente (ver problema 1.19) que cualquier función continua en un rectángulo R es integrable en R. Sin embargo, veremos un resultado mucho más general (teorema de Lebesgue) en el capítulo 3.

Problemas

1.11 Calcular $\int_0^1 xdx$ directamente a partir de la definición.

1.12 Probar el lema 1.3: Si P' es una partición más fina que P entonces

$$L(f,P) \leq L(f,P'), \quad \text{mientras que} \quad U(f,P) \geq U(f,P').$$

1.13 Dadas dos particiones cualesquiera P_1, P_2 de un rectángulo R, siempre existe una partición P de R tal que P es más fina que P_1 y que P_2.
Indicación: Probar primero el resultado para un intervalo de la recta real. Después, en el caso general de un rectángulo $R = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ de $\mathbb{R}^n$, si $P_1 = P_1^1 \times ... \times P_1^n$ y $P_2 = P_2^1 \times ... \times P_2^n$, tómese P^i partición de $[a_i, b_i]$ más fina que P_1^i y que P_2^i; entonces $P = P^1 \times ... \times P^n$ es más fina que P_1 y que P_2.

1.14 Sea P una partición de un intervalo $[a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$, probar que existe $\delta > 0$ tal que si P' es cualquier partición de $[a,b]$ en subintervalos cuyas longitudes son menores o iguales que δ, entonces la suma de las longitudes de los subintervalos de P' que no están contenidos en algún subintervalo de P es menor o igual que ε.

Indicación: Tomar $\delta = \varepsilon/N$, donde N es el número de puntos de la partición P.

1.15 Más en general, probar que, dados un rectángulo R de $\mathbb{R}^n$, una partición P de R y $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si P' es cualquier partición de R en subrectángulos cuyos lados son menores o iguales que δ, entonces la suma de los volúmenes de los subrectángulos de P' que no están contenidos en algún subrectángulo de P es menor o igual que ε.

Indicación: Tomar $\delta = \varepsilon/T$, donde T es la suma total de las *áreas* de las caras de todos los subrectángulos de la partición P.

1.16 Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables. Supongamos que $f \geq g$ sobre A. Probar que entonces

$$\int_A f \geq \int_A g.$$

1.17 En particular, si A es un rectángulo y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable y está acotada superiormente por M e inferiormente por m, entonces

$$mv(A) \leq \int_A f \leq Mv(A).$$

1.18 Probar el siguiente *teorema del valor medio integral:* Si A es un rectángulo y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, existe $x_0 \in A$ tal que

$$\int_A f = f(x_0)v(A).$$

Indicación: Por el problema anterior, $f(x_1)v(A) \leq \int_A f \leq f(x_2)v(A)$, donde $f(x_1)$ y $f(x_2)$ son el mínimo y máximo absolutos de f sobre A. Utilizar entonces que f es continua y A es conexo.

1.19 Sean A un rectángulo de $\mathbb{R}^n$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Probar que f es integrable en A.

Indicación: Al ser f continua, alcanza su máximo y mínimo sobre cada subrectángulo de una partición; además, puesto que A es compacto, f es uniformemente continua sobre A. Combinar estos dos hechos con el criterio de integrabilidad de Riemann para deducir el resultado.

1.20 Sean A un rectángulo, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que es constante salvo quizás en una cantidad finita de puntos. Probar que f es integrable en A, y decir cuál es su integral.

1.21 Sea $f(x) = 1$ para todo $x \in A$. ¿Qué debería ser $\int_A f$?

1.22 Sean A un rectángulo de $\mathbb{R}^n$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que $f \geq 0$ sobre A y que $\int_A f = 0$. Probar que entonces $f = 0$.

1.23 Probar que si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es creciente (o decreciente) entonces es integrable en $[a, b]$.