Capítulo 10

Campos conservativos

En este capítulo continuaremos estudiando las integrales de linea, concentrándonos en la siguiente pregunta: ¿bajo qué circunstancias la integral de linea de un campo vectorial no depende tanto del camino a lo largo del que se integra, sino sólo de los puntos inicial y final de su trayectoria?

Comenzaremos con un resultado que generaliza el teorema fundamental del cálculo y que también es muy útil para calcular las integrales de linea de campos vectoriales que son gradientes (derivadas) de campos escalares; en este caso la integral del campo vectorial gradiente dependerá solamente del valor del campo escalar correspondiente en los extremos del camino. Utilizaremos la siguiente notación: si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar de clase C^1, su función derivada se llama también *gradiente*, y se denota

$$\nabla f(x) = f'(x) = \big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\big)$$

para cada $x \in A$. En este caso se tiene que $\nabla f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo en A. Recíprocamente, se dice que un campo vectorial continuo $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un *campo vectorial gradiente* si existe un cierto campo escalar $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $F = \nabla f$. En este caso se dice que f es una función o campo *potencial* para F.

Teorema 10.1 *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar de clase C^1, y $\gamma : [a, b] \longrightarrow A$ un camino C^1 a trozos. Entonces*

$$\int_\gamma \nabla f \cdot ds = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Por tanto, si $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial gradiente y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función potencial suya, entonces, para todo par de puntos

$p, q \in A$ y para todo camino C^1 a trozos γ con traza contenida en A y que comience en p y acabe en q, se tiene

$$\int_\gamma F \cdot ds = f(q) - f(p).$$

Demostración: Consideremos la función $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = f(\gamma(t)),$$

cuya derivada es

$$g'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

Apligando el teorema fundamental del cálculo a esta función g obtenemos lo que deseamos:

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)dt$$
$$= \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \int_a^b \nabla f \cdot ds. \qquad \square$$

Si un campo vectorial puede reconocerse como el gradiente de un campo escalar, el cálculo de sus integrales de linea resulta mucho más sencillo.

Ejemplo 10.2 Sea $\gamma(t) = (t^4/4, \sin^3(\pi t/2))$. Calcular la integral de linea

$$\int_\gamma ydx + xdy.$$

Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre en el caso de funciones de una variable (donde toda función continua $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene una primitiva, a saber, $g(t) = \int_a^t h(s)ds$), no todo campo vectorial $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un gradiente, es decir, salvo en el caso $n = 1$, no tiene por qué existir un campo escalar $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla f$. Precisamente, un modo de saber que un campo vectorial F *no* es un gradiente, es aplicar el teorema anterior: basta entontrar dos caminos γ_1 y γ_2, con los mismos puntos inicial y final, a lo largo de los cuales las integrales de linea $\int_{\gamma_1} F \cdot ds$ y $\int_{\gamma_1} F \cdot ds$ toman valores diferentes.

Ejemplo 10.3 Sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial definido por

$$F(x, y, z) = (xy, y, z).$$

Probar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = F$.

De hecho, resulta que la condición de independencia del camino que nos da el teorema 10.1 no sólo es necesaria, sino también suficiente (al menos cuando el recinto A tiene una forma sencilla). El siguiente resultado complementan el teorema 10.1, caracterizando los campos gradientes como aquellos campos vectoriales para los que las integrales de linea sólo dependen de los puntos inicial y final del camino sobre el que se integran o también, si el dominio sobre el que están definidos es convexo, como aquellos cuyas componentes tienen derivadas parciales que satisfacen una condición de simetría.

Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo, y sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow A$ un camino C^1 a trozos. Se dice que $\int_\gamma F \cdot ds$ es independiente del camino γ si para cualquier otro camino C^1 a trozos $\sigma : [c, d] \longrightarrow A$ se tiene que

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_\sigma F \cdot ds.$$

Teorema 10.4 *Sea A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *F es un campo gradiente, es decir, existe una función potencial $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $F = \nabla f$;*
2. *$\int_\gamma F \cdot ds = 0$ para todo camino cerrado γ;*
3. *$\int_\gamma F \cdot ds$ es independiente del camino γ.*

   Si además F es de clase C^1 y A es un abierto convexo*, las afirmaciones anteriores también equivalen a la siguiente:*
4. *Para todos $i, j = 1, ..., n$ se tiene que*
$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}.$$

De un campo F que satisfaga una de estas propiedades (y por tanto todas) se dice que es un campo conservativo.

Demostración:
(1) $\Longrightarrow$ (2): Es consecuencia del teorema 10.1
(2) $\Longrightarrow$ (3): Sean $\gamma_1 : [a_1, b_1] \longrightarrow A$ y $\gamma_2 : [a_2, b_2] \longrightarrow A$ dos caminos C^1 a trozos con el mismo comienzo $p = \gamma(a_i)$ y el mismo final $q = \gamma(b_i)$, $i = 1, 2$. Entonces, si $-\gamma_2$ es el camino inverso a γ_2, se tiene que $\gamma = \gamma_1 * (-\gamma_2)$ es un camino cerrado en A luego, por hipótesis, $\int_\gamma F \cdot ds = 0$. Pero

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_{\gamma_1} F \cdot ds + \int_{-\gamma_2} F \cdot ds = \int_{\gamma_1} F \cdot ds - \int_{\gamma_2} F \cdot ds,$$

y se deduce que $\int_{\gamma_1} F\cdot ds = \int_{\gamma_2} F\cdot ds$.
(3) $\Longrightarrow$ (1): sea $a\in A$. No hay pérdida de generalidad en suponer que A es conexo (si no lo fuera podríamos trabajar en cada una de sus componentes conexas). Como A es un abierto de $\mathbb{R}^n$, resulta que A es conexo por caminos e incluso conexo por caminos poligonales; en particular A es conexo por caminos C^1 a trozos. Así, dado cualquier $x\in A$ podemos escoger un camino C^1 a trozos $\gamma_x:[0,1]\longrightarrow A$ tal que $\gamma_x(0)=a$ y $\gamma_x(1)=x$. Definamos entonces $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ por

$$f(x)=\int_{\gamma_x} F\cdot ds$$

para cada $x\in A$. Por la condición (3), es claro que la definición de $f(x)$ no depende de la elección de γ_x. Veamos que f es diferenciable en A y que $\nabla f(x)=F(x)$ para cada $x\in A$. Fijemos $x\in A$. Como F es continuo en x, dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $\|h\|\leq\delta$ entonces $\|F(x+h)-F(x)\|\leq\varepsilon$. Nótese que, por la condición (3), si σ denota el segmento $[x,x+h]$, entonces

$$\int_{\gamma_x} F\cdot ds+\int_{\sigma} F\cdot ds=\int_{\gamma_x*\sigma} F\cdot ds=\int_{\gamma_{x+h}} F\cdot ds,$$

puesto que tanto γ_{x+h} como $\gamma_x*\sigma$ son caminos que empiezan en a y terminan en $x+h$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= \int_{\gamma_{x+h}} F\cdot ds-\int_{\gamma_x} F\cdot ds\\ &=\int_{\sigma} F\cdot ds=\int_0^1 F(x+th)\cdot h dt, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} &\big|f(x+h)-f(x)-F(x)\cdot h\big| = \Big|\int_0^1 \big(F(x+th)-F(x)\big)\cdot h dt\Big|\\ &\leq\int_0^1 \|F(x+th)-F(x)\|\cdot\|h\|dt\leq\int_0^1 \varepsilon\|h\|dt=\varepsilon\|h\|, \end{aligned}$$

para todo h tal que $\|h\|\leq\delta$. Esto prueba que f es diferenciable en x y $\nabla f(x)=F(x)$.
(1) $\Longrightarrow$ (4): Si $\nabla f=F$ (es decir, $\partial f/\partial x_i=F_i$, $i=1,...,n$) y F es C^1 entonces f es de clase C^2 y, por el teorema de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j},$$

lo que significa que

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}.$$

(4) $\Longrightarrow$ (1): Fijemos un punto $a \in A$. Para cada $x \in A$ sea σ_x el segmento que une a con x,

$$\sigma_x(t) = tx + (1-t)a, \quad t \in [0,1].$$

La traza de σ_x está dentro de A por ser este conjunto convexo. Definamos $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \int_{\sigma_x} F \cdot ds$$

para cada $x \in A$. Tenemos que comprobar que $\nabla f(x) = F(x)$, es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = F_j(x)$$

para cada $x \in A$, $j = 1, ..., n$. Utilizando el teorema de derivación bajo el signo integral (ver 8.5) y la hipótesis de simetría de las derivadas, e integrando por partes al final, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big(\int_0^1 \sum_{j=1}^n F_j(a+t(x-a))(x_j-a_j)dt\Big) \\
&= \int_0^1 \left[\left(\sum_{j=1}^n t\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(a+t(x-a))(x_j-a_j)\right) + F_i(a+t(x-a))\right] dt \\
&= \int_0^1 \Big(\sum_{j=1}^n t\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a+t(x-a))(x_j-a_j)dt + \int_0^1 F_i(a+t(x-a))\Big)dt \\
&= \int_0^1 t\nabla F_i(a+t(x-a))(x-a)dt + \int_0^1 F_i(a+t(x-a))dt \\
= \quad & F_i(x) - \int_0^1 F_i(a+t(x-a))dt + \int_0^1 F_i(a+t(x-a))dt = F_i(x),
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos. $\Box$

Observación 10.5 Cuando $F = (P, Q)$ es un campo vectorial definido en un abierto del plano $\mathbb{R}^2$, la condición (4) del teorema anterior significa simplemente que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

En el caso de un campo vectorial F definido sobre un abierto del espacio $\mathbb{R}^3$, recordemos que puede definirse el *rotacional* de $F=(F_1,F_2,F_3)$ por

$$\mathrm{rot}F(x,y,z)=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.$$

En el caso $n=3$ la condición (4) del teorema anterior significa así que $\mathrm{rot}F(x,y,z)=(0,0,0)$ para todo $(x,y,z)\in A$ (ver el ejercicio 10.13). Se dice en este caso que el campo F es *irrotacional.*

Observación 10.6 La prueba de la parte (1) $\iff$ (4) del teorema anterior muestra que la hipótesis de que A sea convexo puede sustituirse por una más débil, por ejemplo que A sea un abierto *estrellado*, es decir que exista un punto $a\in A$ tal que para cualquier otro punto $x\in A$ el segmento $[a,x]$ está contenido en A. Sin embargo, el teorema anterior no es cierto para todo conjunto abierto A; si A no es simplemente conexo entonces el enunciado del teorema no es cierto en general, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.7 Sean $A=\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, y $F:A\longrightarrow\mathbb{R}^2$ definido por

$$F(x,y)=(P,Q)=\big(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\big).$$

Comprobar que

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

en A, y que sin embargo F no es un campo gradiente: por ejemplo, si σ es un camino que recorre una vez la circunferencia unidad entonces $\int_\sigma F\cdot ds\neq 0$.

No obstante, en $\mathbb{R}^3$ las cosas son un poco diferentes: puede probarse que si F es un campo vectorial de clase C^1 definido en todo $\mathbb{R}^3$ salvo quizás una cantidad finita de puntos entonces las cuatro condiciones del teorema anterior son equivalentes. Por ejemplo, para el campo gravitatorio de la tierra, definido por

$$F(x,y,z)=\frac{-GMm}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z),$$

y que tiene una singularidad en el origen, el teorema es válido.

Problemas

10.8 Calcular:

(a) $\int_\gamma xdy + ydx$, si γ es un camino de $(-1,2)$ a $(2,3)$.

(b) $\int_\gamma yzdx + zxdy + xydz$, si γ es un camino de $(1,1,1)$ a $(1,2,3)$.

10.9 Probar que dos funciones de potencial para un mismo campo vectorial (definido en un abierto conexo) difieren a lo sumo en una constante

10.10 Calcular una función de potencial para el campo

$$F(x,y) = (3x^2 + y, e^y + x)$$

en $\mathbb{R}^2$.

10.11 Sea $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el campo definido por

$$F(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}).$$

(a) Calcular $\int_\gamma F$, siendo $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Deducir que F no es conservativo.

(b) Encontrar un abierto $A \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tal que $F_{|A}$ sea conservativo.

10.12 Comprobar que el campo $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x,y,z) = (y, z\cos yz + x, y\cos yz)$$

es conservativo, y calcular un potencial.

10.13 Sea F un campo vectorial definido en un abierto de $\mathbb{R}^3$. Comprobar que se satisface la condición de simetría del teorema 10.4

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i},$$

$i,j = 1,2,3$, si y sólo si $\mathrm{rot} F = 0$.

10.14 Sea $\sigma : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el camino definido por

$$\sigma(t) = (e^{t-1}, \sin \frac{\pi}{t}).$$

Calcular la integral de linea

$$\int_\sigma 2x \cos y dx - x^2 \sin y dy.$$

10.15 Demostrar que el campo gravitatorio de la tierra es irrotacional, y calcular una función de potencial suya.

10.16 Sea $F(x, y, z) = (2xyz + \sin x, x^2 z, x^2 y)$. Encontrar una función f tal que $\nabla f = F$.

10.17 Calcular $\int_\gamma F \cdot ds$, donde $\gamma(t) = (\cos^5 t, \sin^3 t, t^4)$, y F es el campo del ejercicio anterior.