

Capítulo 13

Los teoremas de Stokes y Gauss

En este último capítulo estudiaremos el teorema de Stokes, que es una generalización del teorema de Green en cuanto que relaciona la integral de un campo vectorial sobre una curva cerrada que es borde de una superficie paramétrica simple con la integral de su rotacional en dicha superficie; y también el teorema de Gauss de la divergencia, que puede verse como una versión tridimensional del teorema de Green, al relacionar la integral de un campo vectorial en una superficie cerrada que es borde de un sólido tridimensional con la integral de su divergencia en el interior de dicho sólido. En realidad estos tres teoremas pueden verse como generalizaciones del segundo teorema fundamental del cálculo a funciones de varias variables, y a su vez son casos particulares de una versión general del teorema de Stokes para variedades diferenciables de dimensión arbitraria que se estudia en cursos superiores (para enunciar y demostrar este teorema más general se requiere el desarrollo de una teoría de formas diferenciales y el uso de particiones diferenciables de la unidad, lo que no haremos en este curso por falta de tiempo; el lector interesado puede consultar el libro de Michael Spivak *Cálculo en variedades*, editorial Reverté, 1988).

Para enunciar el teorema de Stokes para superficies en \mathbb{R}^3 necesitamos definir lo que es el rotacional de un campo vectorial. Si $F : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto A de \mathbb{R}^3 , se define el rotacional del campo $F = (P, Q, R)$, y se denota por $\text{rot}F$, como

$$\text{rot}F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Teorema 13.1 (de Stokes) *Sea S una superficie paramétrica simple con borde ∂S , parametrizada por $\Phi : \overline{D} \rightarrow \overline{S}$, donde D es la región interior a una curva cerrada simple C regular a trozos en \mathbb{R}^2 orientada positivamente, y $\partial S = \Phi(C)$ se supone orientada en el sentido que resulte de componer C con Φ . Sea F un campo vectorial de clase C^1 definido en un entorno abierto de S en \mathbb{R}^3 , y con valores en \mathbb{R}^3 . Entonces se tiene que*

$$\int_S \text{rot} F \cdot \mathbf{N} = \int_{\partial S} F.$$

Otra forma de escribir la igualdad de estas integrales es la siguiente:

$$\begin{aligned} & \int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &= \int_{\partial S} P dx + Q dy + R dz, \quad (*) \end{aligned}$$

donde $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$, $dx \wedge dy$ denotan, respectivamente,

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

Así, por ejemplo,

$$\int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz$$

equivale a escribir

$$\int_D \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du dv.$$

Es interesante observar que cuando S es una región del plano xy encerrada por una curva cerrada simple regular a trozos y $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ el teorema de Stokes se reduce a la fórmula de Green

$$\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial S} P dx + Q dy.$$

Aún más instructivo resulta constatar que la demostración del teorema de Stokes consiste esencialmente (aparte de cálculos) en aplicar tres veces el la fórmula de Green, como vemos a continuación.

Demostración del teorema de Stokes: Bastará probar las tres igualdades siguientes:

$$\int_{\partial S} P dx = \int_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx \right),$$

$$\int_{\partial S} Q dy = \int_S \left(-\frac{\partial Q}{\partial z} dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy \right),$$

$$\int_{\partial S} R dz = \int_S \left(-\frac{\partial R}{\partial x} dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz \right),$$

ya que sumándolas obtenemos (*). Puesto que la demostración de las tres fórmulas es totalmente análoga, nos contentaremos con probar la primera de ellas. Hay que demostrar pues que

$$\int_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right) dudv = \int_{\partial S} P dx \quad (1)$$

Denotemos $f(u, v) = P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Ahora utilizaremos la fórmula

$$\left(-\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(f \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(f \frac{\partial x}{\partial u} \right), \quad (2)$$

que no es difícil comprobar (véase el ejercicio 13.3). Utilizando esta igualdad y el teorema de Green en el primer miembro de (1) obtenemos

$$\int_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right) dudv =$$

$$\int_D \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(f \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(f \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right] dudv = \int_C f \frac{\partial x}{\partial u} du + f \frac{\partial x}{\partial v} dv. \quad (3)$$

Sea $\gamma = (u(t), v(t))$, $t \in [a, b]$, una parametrización de $C \subset \mathbb{R}^2$ recorrida en sentido positivo, entonces $\Phi \circ \gamma(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$, $t \in [a, b]$, es una parametrización admisible de ∂S , y

$$\int_{\partial S} P dx =$$

$$\int_a^b P(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \frac{d}{dt} (x(u(t), v(t))) dt =$$

$$\int_a^b P(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) dt =$$

$$\int_C f \frac{\partial x}{\partial u} du + f \frac{\partial x}{\partial v} dv,$$

es decir

$$\int_{\partial S} P dx = \int_C f \frac{\partial x}{\partial u} du + f \frac{\partial x}{\partial v} dv,$$

lo que combinado con (3) nos da (1). \square

El teorema de Stokes puede aplicarse a muchas más superficies que las paramétricas simples que figuran en su enunciado. Por ejemplo, se puede aplicar a un cilindro K del tipo $x^2 + y^2 = 0$, $a \leq z \leq b$. En efecto, al cortar el cilindro K por el plano $x = 0$ obtenemos una descomposición de K en dos superficies paramétricas simples K_1 y K_2 que podemos orientar de modo que sus bordes, en los segmentos por donde se pegan (que llamaremos costuras) tengan orientaciones opuestas. Esto equivale a decir que la normal exterior unitaria en K_1 y K_2 apunta siempre hacia afuera del cilindro K . Hágase un dibujo. Sea F un campo vectorial de clase C^1 en K . Al aplicar el teorema de Stokes a F en K_1 y en K_2 y sumar las igualdades así obtenidas, como ∂K_1 y ∂K_2 tienen orientaciones opuestas en las costuras, vemos que las integrales de F sobre las costuras se cancelan unas con otras (porque cada costura se recorre exactamente dos veces, una vez en el sentido contrario de la otra) y por tanto dicha suma es igual a la suma de las integrales de F sobre C_1 y C_2 , que es el borde de K . Es decir, vemos que

$$\int_K \text{rot}F \cdot dS = \int_{K_1} \text{rot}F \cdot dS + \int_{K_2} \text{rot}F \cdot dS = \dots = \int_{C_1} F + \int_{C_2} F = \int_{\partial K} F$$

y el teorema de Stokes vale para K .

Consideremos ahora el caso de una esfera S en \mathbb{R}^3 , que tampoco es una superficie paramétrica simple, pero que puede descomponerse en dos que sí lo son: el hemisferio norte S^+ y el hemisferio sur S^- , pegadas por el ecuador C . Cada hemisferio puede orientarse de modo que la curva C del ecuador se recorre en sentido inverso según se la considere com perteneciente a uno u otro hemisferio. Esto lo podemos resumir con la notación $C\partial S^+ = C = -\partial S^-$. Aplicando el teorema de Stokes tenemos entonces

$$\int_S \text{rot}F \cdot dS = \int_{S^+} \text{rot}F \cdot dS + \int_{S^-} \text{rot}F \cdot dS = \int_C F \cdot ds - \int_C F \cdot ds = 0,$$

es decir, el teorema de Stokes se cumple para la esfera S entendiéndose que, como no tiene borde, la integral de F sobre dicho borde inexistente se define como cero.

Lo mismo vale para un toro (ver el ejercicio 13.6), y de hecho puede probarse que para cualquier superficie compacta y sin borde M de \mathbb{R}^3 se tiene que

$$\int_M \text{rot}F \cdot dS = 0.$$

En realidad la única propiedad que debe cumplir una superficie S de \mathbb{R}^3 (quizás con borde) para poderle aplicar el teorema de Stokes es que S pueda

descomponerse en una cantidad finita de superficies paramétricas simples con borde orientadas y pegadas unas con otras de tal manera que cada trozo de borde que pertenezca a la vez a dos de estas superficies se recorra en sentido inverso según pertenezca a una o a otra de estas superficies. Es claro que, para una superficie S fabricada de esta manera, el tipo de argumento usado para el cilindro, la esfera o el toro, permite establecer la validez del teorema de Stokes.

Esta propiedad equivale a pedir que se pueda definir sobre S un campo vectorial continuo de vectores normales a S que no se anula en ningún punto (o lo que es lo mismo, que exista una aplicación continua $\mathbf{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\|\mathbf{n}(p)\| = 1$ y $\mathbf{n}(p) \perp TS_p$ para todo $p \in S$). A las superficies con esta propiedad se les llama *orientables*.

Sin embargo existen superficies que no son orientables y a las que no se les puede aplicar el teorema de Stokes. El ejemplo típico en \mathbb{R}^3 es la *banda de Moebius*, superficie que se puede fabricar tomando una banda plana y pegando un extremo con otro después de dar media vuelta a uno de ellos. La superficie así construida, aunque localmente pueda parecer lo contrario, tiene una sola cara y un sólo borde, que forma una curva cerrada simple. Si fabricamos con papel y pegamento un modelo B de la banda de Moebius vemos que, dado cualquier punto de la banda, se puede dibujar un camino continuo dentro de la banda que empieza en ese punto por una cara determinada y acaba en el mismo punto pero por la otra cara, y sin tocar en ningún momento el borde de la banda. Si ahora intentamos transportar continuamente a lo largo de este camino un vector de norma uno \mathbf{n} perpendicular a la superficie, vemos que al volver al punto inicial el vector apunta en sentido opuesto. Esto hace ver que es imposible definir un campo de vectores de norma uno y perpendiculares a B que sea continuo en todos los puntos, es decir, B no es orientable.

Por otra parte, no es difícil ver que el teorema de Stokes falla en B . En efecto, podemos dividir B en dos superficies paramétricas simples B_1 y B_2 obtenidos al cortar B transversalmente por dos sitios diferentes. Pero resulta imposible orientar B_1 y B_2 de modo que, en los segmentos donde se pegan, las orientaciones del borde de B_1 y del borde de B_2 sean opuestas. Esto supone que si aplicamos el teorema de Stokes a B_1 y B_2 y sumamos las igualdades obtenidas vamos a deducir que

$$\int_B \text{rot}F \cdot dS = \int_{B_1} \text{rot}F \cdot dS + \int_{B_2} \text{rot}F \cdot dS = \sum_{j=1}^4 \int_{C_j} F \cdot ds + 2 \int_L F \cdot ds,$$

donde L es uno de esos dos segmentos donde se pegan B_1 y B_2 , y C_1, \dots, C_4

son los cuatro trozos de ∂B generados al cortar B en B_1 más B_2 ; esto sucede porque las orientaciones de B_1 y B_2 son opuestas en uno de los segmentos donde estas piezas se pegan (a lo largo de este segmento las integrales de línea se cancelan una con otra), y la misma en el otro (al que llamamos L , y sobre el cual las integrales se suman en vez de cancelarse). Es fácil ver que existen campos vectoriales F de clase C^1 tales que $F = 0$ en ∂B pero $\int_L F \cdot ds \neq 0$. Para estos campos se tiene, por lo anterior, que

$$\int_B \operatorname{rot} F \cdot dS = 2 \int_L F \cdot ds,$$

y también

$$\int_{\partial B} F \cdot ds = 0.$$

Por tanto, si el teorema de Stokes fuera cierto en B para uno de estos campos F llegaríamos a que $\int_L F \cdot ds = 0$, una contradicción.

A propósito de la banda de Moebius, es interesante señalar que si por su borde, que es homeomorfo a una circunferencia, pegamos un círculo entonces, obtenemos una superficie que es homeomorfa al plano proyectivo (y que a su vez es el prototipo de superficie compacta sin borde y no orientable). Esta operación no puede realizarse en \mathbb{R}^3 sin incurrir en intersecciones de la nueva superficie consigo misma; se necesitan cuatro dimensiones por lo menos para poder llevarla a cabo. Dicho de otro modo, el plano proyectivo cabe en \mathbb{R}^4 , pero no en \mathbb{R}^3 . Sin embargo podemos dar una *demonstración visual* de que el plano proyectivo menos un círculo es igual a una banda de Moebius. En efecto, el plano proyectivo se define como la clase de equivalencia de todas las rectas vectoriales de \mathbb{R}^3 , o lo que es lo mismo, como el conjunto cociente de una esfera por la relación de equivalencia que consiste en identificar cada punto de la esfera con su antipodal (más llanamente, el plano proyectivo es un mundo en el que un señor es el mismo señor que se encuentra en sus antípodas). Si a esta esfera con los puntos antipodales identificados le quitamos un casquete polar del hemisferio norte, y por tanto también el mismo casquete polar del hemisferio sur, que son identificables a un círculo en el plano proyectivo, obtenemos una banda cerrada B en la que los puntos antipodales siguen estando identificados. Puesto que cada punto de B entre el meridiano de Greenwich y el de longitud 180 está identificado con su antipodal situado en un meridiano mayor o igual que 180 y menor o igual que 360, podemos prescindir de todos los puntos de longitud mayor que 180, quedándonos con un sólo representante de cada clase de equivalencia para los puntos de longitud en el intervalo $(0, 180)$, teniendo en cuenta que los

puntos de B que están en el meridiano 0 se siguen identificando con sus antipodales del meridiano 180. Es decir, B es una banda en la que sus lados extremos se han pegado dando media vuelta previa a uno de ellos, o sea la banda de Moebius.

Pasamos ahora a estudiar el último teorema del curso, el de Gauss de la divergencia. Llamaremos *sólido simple* a todo conjunto compacto V de \mathbb{R}^3 homeomorfo a una bola y cuya frontera ∂V es una superficie orientable (que puede descomponerse en una cantidad finita de superficies paramétricas simples con bordes, orientadas de tal manera que en los trozos de curva donde dos de estas superficies se peguen, las orientaciones sean opuestas). Supondremos que dicha frontera está orientada con la normal unitaria \mathbf{n} apuntando hacia el exterior de V . Recordemos que la divergencia de un campo vectorial $F = (P, Q, R)$ en \mathbb{R}^3 se define por

$$\operatorname{div}F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Teorema 13.2 (de Gauss de la divergencia) *Sea V un sólido simple de \mathbb{R}^3 y $S = \partial V$ su borde, orientado con la normal unitaria exterior \mathbf{n} . Sea $F : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 . Entonces*

$$\int_V \operatorname{div}F = \int_S F \cdot \mathbf{n} dS.$$

Demostración: Haremos la demostración suponiendo que V es un sólido proyectable xy , proyectable yz , y proyectable xz . Que V sea proyectable xy significa que que V puede escribirse las manera siguiente:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\},$$

donde D es una región del plano xy limitada por una curva cerrada simple regular a trozos, y $\varphi, \psi : D \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de clase C^1 en D ; es decir, V puede verse como lo que queda entre las gráficas de dos funciones de clase C^1 definidas en la proyección de V sobre el plano xy . Análogamente se define el ser proyectable xz o proyectable yz .

Sea $F = (P, Q, R)$. Como V es proyectable xy podemos escribir

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\},$$

donde D, φ, ψ cumplen las condiciones explicitadas anteriormente, y tenemos, aplicando el teorema de Fubini, que

$$\int_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \int_D R(x, y, \psi(x, y)) - R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy. \quad (4)$$

Calculemos por otra parte la integral

$$\int_S (0, 0, R) \cdot \mathbf{n} dS.$$

Podemos descomponer S en tres piezas, $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, donde $S_1 = \{(x, y, \varphi(x, y)) : (x, y) \in D\}$, $S_2 = \{(x, y, \psi(x, y)) : (x, y) \in D\}$, y $S_3 = \{(x, y, z) : (x, y) \in \partial D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$. En S_3 el vector normal exterior unitario \mathbf{n} es perpendicular al eje z y por tanto también al campo $(0, 0, R)$, de modo que

$$\int_{S_3} (0, 0, R) \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Por otro lado la normal \mathbf{n} apunta hacia arriba en S_2 y hacia abajo en S_1 , de modo que, al calcular las integrales $\int_{S_i} (0, 0, R) \cdot \mathbf{n} dS$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{S_2} (0, 0, R) \cdot \mathbf{n} dS &= \int_D (0, 0, R(x, y, \psi(x, y))) \cdot \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}, -\frac{\partial \psi}{\partial y}, 1\right) dx dy = \\ &= \int_D R(x, y, \psi(x, y)) dx dy, \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} \int_{S_1} (0, 0, R) \cdot \mathbf{n} dS &= \int_D (0, 0, R(x, y, \varphi(x, y))) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, -1\right) dx dy = \\ &= - \int_D R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \int_S (0, 0, R) \cdot \mathbf{n} dS &= \\ &= \int_{S_2} (0, 0, R) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_1} (0, 0, R) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_3} (0, 0, R) \cdot \mathbf{n} dS = \\ &= \int_D R(x, y, \psi(x, y)) dx dy - \int_D R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy + 0 = \\ &= \int_D (R(x, y, \psi(x, y)) - R(x, y, \varphi(x, y))) dx dy, \end{aligned}$$

lo que combinado con (4) nos da

$$\int_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \int_S (0, 0, R) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (5)$$

Análogamente, usando que V es proyectable xz y proyectable yz , se comprueba que

$$\int_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \int_S (0, Q, 0) \cdot \mathbf{n} dS, \quad (6)$$

y que

$$\int_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \int_S (P, 0, 0) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (7)$$

Finalmente, sumando (5), (6) y (7) obtenemos que

$$\int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \int_S (P, Q, R) \cdot \mathbf{n} dS,$$

es decir el enunciado del teorema para sólidos proyectables en cualquiera de las tres direcciones de los ejes. La clase de dichos sólidos incluye las bolas y en general todos los sólidos convexos de \mathbb{R}^3 .

Una vez demostrado el teorema de Gauss para sólidos convexos, podría extenderse a sólidos V que sean C^2 -difeomorfos a la bola unidad, usando el teorema del cambio de variable de manera análoga a la del problema 11.12, aunque los cálculos son en este caso mucho más complicados.

También podría extenderse a los sólidos más generales del enunciado siguiendo un procedimiento análogo a la parte final de la demostración del teorema de Green: se aproximaría la superficie S por una superficie S' formada por caras de triángulos orientados (y pegados unos con otros de modo que los lados que sean comunes a dos triángulos tengan orientaciones opuestas según se vean como pertenecientes a uno u otro triángulo), y esta nueva superficie S' sería la frontera de un sólido V' que podría descomponerse en unión de poliedros convexos orientados de modo que dos caras contiguas tengan normales unitarias que apuntan en sentido opuesto. El teorema de la divergencia es válido para V' y S' , es decir

$$\int_{V'} \operatorname{div} F = \int_{S'} F \cdot dS,$$

y como

$$\int_{V'} \operatorname{div} F \approx \int_V \operatorname{div} F \pm \varepsilon$$

y

$$\int_{S'} F \cdot dS \approx \int_S F \cdot dS \pm \varepsilon$$

haciendo tender ε a cero se obtendría el resultado general.

Resultaría muy engorroso, sin embargo, detallar con cuidado este esquema de demostración. Llegados a este punto, y una vez que el lector haya

desarrollado su intuición sobre los teoremas de Green, Stokes y Gauss, y se haya ejercitado con ellos, lo más recomendable sería pasar a estudiar las herramientas (a saber, formas diferenciales y particiones de la unidad) que permiten enunciar y demostrar la versión general de estos teoremas para variedades diferenciables en \mathbb{R}^n . Remitimos al lector interesado al libro de Spivak citado al comienzo de este capítulo. \square

Igual que ocurría con el teorema de Stokes, el teorema de Gauss es válido para muchos más sólidos que los del enunciado. Por ejemplo, es fácil ver que el teorema de la divergencia es válido para cualquier sólido homeomorfo a una bola agujereada del tipo $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$ cuya frontera se componga de dos superficies orientadas con la normal exterior (sin embargo, en la frontera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ del agujero, exterior en este caso significa que \mathbf{n} apunta para adentro del agujero).

También es fácil ver que el teorema de Gauss es válido para cualquier toro en \mathbb{R}^3 , o incluso una suma conexa de una cantidad finita de toros en \mathbb{R}^3 . Lo importante en todos estos casos es que el sólido V considerado pueda descomponerse en una cantidad finita de sólidos simples orientados de tal modo que en las superficies donde dos de estos sólidos se pegan, las normales apunten en sentido contrario.

De hecho puede demostrarse, aunque no lo haremos aquí, que toda superficie S compacta sin borde en \mathbb{R}^3 es orientable, y el teorema de Gauss es válido para el sólido V limitado por S .

Problemas

13.3 En este ejercicio se comprobará la fórmula (2) usada en la demostración del teorema de Stokes. Lo más sencillo es comprobarla en dos pasos:

1. Usar la fórmula de derivación de un producto para ver que

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(f \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(f \frac{\partial x}{\partial u} \right) = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}.$$

2. Pongamos ahora $f(u, v) = P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Calcular $\partial f / \partial u$ y $\partial f / \partial v$ mediante la regla de la cadena, y después aplicar el apartado anterior para deducir que

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(f \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(f \frac{\partial x}{\partial u} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}.$$

13.4 Repetir el problema 12.19, usando los teoremas de Stokes o Gauss en los casos en que resulte más conveniente.

13.5 Consideramos las superficies $S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$, $S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, z \geq 1\}$ y $S = S_1 \cup S_2$. Sea el campo $F(x, y, z) = (zx + z^2y + x, z^3xy + y, z^2x^2)$. Calcular

$$\int_S \text{rot}F.$$

13.6 Demostrar que si S es una superficie sin borde (por ejemplo, una esfera, o un toro en \mathbb{R}^3) entonces

$$\int_S \text{rot}F \cdot dS = 0$$

para todo campo vectorial F de clase C^1 en S .

13.7 Utilizar el teorema de la divergencia para calcular $\int_S F$, donde $F(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)$, y S consta de:

$$\{x^2 + y^2 = 1, -1 < z < 1\} \cup \{x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\} \cup \{x^2 + y^2 \leq 1, z = -1\}.$$

13.8 Consideramos $f(x, y, z) = x^2 + 2xy + z^2 - 3x + 1$, $F(x, y, z) = (e^{-xy} + z, z \sin y, x^2 - z^2 + y^2)$, y sea $V = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 + z^2 \geq 4z - 3\}$. Calcular

$$\int_{\partial V} \nabla f + \text{rot}F.$$

13.9 Sean $V = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$, $S = \{(x, y, z) : z = 1 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, y sea C el borde de S .

- Calcular el área de S .
- Calcular el volumen de V .
- Calcular $\int_C F$, donde $F(x, y, z) = (1 - 2z, 0, 2y)$.

13.10 Sea $B(t)$ una bola euclídea de radio $t > 0$ con centro en un punto $a \in \mathbb{R}^3$, y sea $S(t)$ la esfera correspondiente. Sea $F : B(1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 , y sea $\mathbf{n} = \mathbf{n}_t$ la normal unitaria exterior a $S(t)$. Probar que

$$\text{div}F(a) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{vol}(B(t))} \int_{S(t)} F \cdot \mathbf{n} dS.$$

13.11 En los siguientes ejercicios, $\partial f/\partial n$ denota la derivada direccional de un campo escalar f en la dirección de la normal unitaria exterior \mathbf{n} a una superficie orientable S que limita un sólido V al que se puede aplicar el teorema de la divergencia. Es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot \mathbf{n}.$$

En cada uno de los ejercicios demostrar la igualdad indicada, suponiendo la continuidad de todas las derivadas que intervienen:

1.

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial n} dS = \int_V \nabla^2 f dx dy dz.$$

2.

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial n} dS = 0$$

siempre que f sea armónica en V (se dice que f es armónica si $\Delta f := \nabla^2 f := \operatorname{div} \nabla f = 0$).

3.

$$\int_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS = \int_V f \nabla^2 g dx dy dz + \int_V \nabla f \cdot \nabla g dx dy dz.$$

4.

$$\int_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS = \int_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dx dy dz.$$

5.

$$\int_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS = \int_S g \frac{\partial f}{\partial n} dS$$

si f y g son ambas armónicas en V .

6.

$$\int_S f \frac{\partial f}{\partial n} dS = \int_V |\nabla f|^2 dx dy dz$$

si f es armónica en V .

13.12 Sea V un sólido convexo de \mathbb{R}^3 cuya frontera es una superficie cerrada S y sea \mathbf{n} la normal unitaria exterior a S . Sean F y G dos campos vectoriales de clase C^1 tales que

$$\operatorname{rot} F = \operatorname{rot} G, \quad \text{y} \quad \operatorname{div} F = \operatorname{div} G$$

en V , y que cumplen

$$F \cdot \mathbf{n} = G \cdot \mathbf{n}$$

en S . Demostrar que $F = G$ en V .

Indicación: Sea $H = F - G$; encontrar una función de potencial f para H y usar una de las igualdades del ejercicio anterior para ver que

$$\int_V \|\nabla f\|^2 dx dy dz = 0.$$