Capítulo 2

Volumen y conjuntos de medida cero

En la recta real normalmente las funciones se integran sobre intervalos. En $\mathbb{R}^n$ es deseable poder considerar integrales de funciones sobre conjuntos más complicados que rectángulos. Sin embargo, no todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es adecuado para integrar funciones sobre él. De hecho, según la definición de integral dada en el capítulo anterior, una misma función puede ser integrable sobre un rectángulo y dejar de serlo en un subconjunto de ese rectángulo; ésto ocurre cuando la frontera de dicho subconjunto es *demasiado grande*. Por ejemplo, la función $f(x) = 1$ es integrable sobre $[0, 1] \times [0, 1]$, pero no lo es sobre $A = ([0, 1] \times [0, 1]) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$.

Por esta razón deberemos restringir la clase de conjuntos sobre los que podemos dar una definición razonable de integral. Esencialmente, lo que se le pedirá a un conjunto para poder integrar funciones sobre él de una manera adecuada es que su frontera no sea demasiado complicada ni demasiado grande. El objetivo de este capítulo, así como del siguiente, es hacer precisas estas ideas.

En primer lugar definiremos cuándo un conjunto tiene *volumen*, y cuál es, en su caso. Ante todo debe advertirse que es imposible establecer una definición de volumen que sea válida para todo subconjunto de $\mathbb{R}^3$ (o de $\mathbb{R}^n$ en general). Lo mínimo que se le podría pedir a una tal definición es que la función de volumen fuera finitamente aditiva e invariante por movimientos rígidos. Es decir, si $v(A)$ denota el volumen de un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^3$, la función v debería satisfacer que

$$v(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \sum_{i=1}^{m} v(A_i)$$

para toda familia finita de conjuntos con volumen $A_1, ..., A_m$ que sean disjuntos dos a dos (i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), y además

$$v(f(A)) = v(A)$$

para todo conjunto A con volumen y toda isometría afín $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

El siguiente resultado, conocido popularmente como *Paradoja de Banach y Tarski*, es uno de los teoremas más sorprendentes de la matemática, y prueba en particular que no puede encontrarse una definición coherente y satisfactoria de volumen susceptible de ser aplicada a cualquier conjunto de $\mathbb{R}^3$. Lo que nos dice este teorema es que podemos romper la bola unidad del espacio $\mathbb{R}^3$ en una cantidad finita de trozos disjuntos y, mediante movimientos rígidos (rotaciones más traslaciones), recomponer estos trozos de manera también disjunta para obtener dos bolas idénticas a la original.

Teorema 2.1 (Banach-Tarski, 1932) *Sea B la bola unidad de $\mathbb{R}^3$. Existen cinco subconjuntos $A_1, ..., A_5$ de B que forman una partición de B, es decir, $B = \cup_{i=1}^5 A_i$, con $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, y existen cinco movimientos rígidos $f_1, ..., f_5 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tales que*

$$\bigcup_{i=1}^{2} f_i(A_i) = B = \bigcup_{i=3}^{5} f_i(A_i),$$

siendo los miembros de cada una de estas dos uniones disjuntos dos a dos.

De hecho, este teorema es equivalente al siguiente resultado de apariencia más general.

Teorema 2.2 (Banach-Tarski) *Sean X e Y subconjuntos acotados y con interior no vacío de $\mathbb{R}^3$. Entonces existen una partición de X en subconjuntos disjuntos dos a dos, $X = X_1 \cup ... \cup X_m$, y movimientos rígidos $f_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $1 \leq i \leq m$, tales que los $f_i(X_i)$ son disjuntos dos a dos, y*

$$Y = \bigcup_{i=1}^{m} f_i(X_i).$$

Por muy extraño que pueda parecer, este resultado, si bien contraviene el sentido común, no viola ninguna ley de la lógica o las matemáticas; simplemente nos indica que existen conjuntos tan patológicos que no pueden tener volumen. También podría decirse que la matemática es más rica que nuestra intuición de la realidad, pues alberga monstruos que repugnan al sentido común y que la razón puede apenas vislumbrar.

Una demostración relativamente elemental del teorema de Banach-Tarski puede encontrarse en el siguiente artículo: K. Stromberg, *The Banach-Tarski paradox*, American Mathematical Monthly, vol. 86 (1979) no. 3, p. 151-161.

Por todo esto, ninguna teoría de la medida o de la integral puede ser lo suficientemente rica y coherente a la vez para dar cuenta de todos los subconjuntos del espacio $\mathbb{R}^n$. Sólo podrá definirse medida, volumen o integral para determinados conjuntos o funciones. Hay diversas teorías de la medida y de la integral. En este curso nos concentraremos en la teoría de la integral de Riemann, que, si bien es menos general que la de Lebesgue, resulta más que suficiente para la mayoría de las aplicaciones.

La definición de la integral de Riemann de una función estudiada en el primer capítulo lleva de modo natural a la siguiente definición de volumen. Recordemos que si $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se define la función característica de A, $1_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, por

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A; \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Definición 2.3 Se dice que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *tiene volumen* si 1_A es integrable; en este caso el volumen de A es el número

$$v(A) = \int_A 1_A(x)dx.$$

Nótese que, en principio, sólo si A es acotado tiene sentido hablar de la integrabilidad de 1_A. Obsérvese también que la región bajo la gráfica de 1_A es un *cilindro* de base A y altura 1. Cuando A es un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$, a $v(A)$ se le llama el *área* de A, y cuando $A \subseteq \mathbb{R}$, su *longitud*. A veces se dice A *tiene contenido* en lugar de *tiene volumen*, y de un conjunto con volumen también se dice que es *medible Jordan*.

Definición 2.4 Se dice que A tiene volumen cero (o contenido cero) si tiene volumen y es $v(A) = 0$.

Proposición 2.5 *Un conjunto A tiene volumen cero si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un recubrimiento finito de A por rectángulos $Q_1, ..., Q_m$ tales que $\sum_{j=1}^{m} v(Q_j) \leq \varepsilon$.*

Demostración: Sea R un rectángulo que contenga a A. Si $\varepsilon > 0$ y $v(A) = 0$, por definición de integral, existe una partición P de R en subrectángulos $S_1, ..., S_M$ tal que $U(1_A, P) \leq \varepsilon$. Si denotamos por P_0 la colección de todos los subrectángulos S_j cuya intersección con A es no vacía, se tiene que

$U(1_A, P) = \sum_{Q \in P_0} v(Q)$, y es claro que P_0 es un recubrimiento finito de A por rectángulos cuyos volúmenes suman menos que ε.

Recíprocamente, supóngase que para $\varepsilon > 0$ dado existe un recubrimiento de A por rectángulos cuyos volúmenes suman menos que ε. Sean $V_1, ..., V_M$ estos rectángulos. Para cada $j = 1, ..., M$ elijamos un rectángulo $\widetilde{V}_j$ tal que $V_j \subset \text{int}(\widetilde{V}_j)$ y $v(\widetilde{V}_j) \leq v(V_j) + \varepsilon/2^j$ (de modo que $\sum_{j=1}^{M} v(\widetilde{V}_j) \leq 2\varepsilon$).

Sean ahora R un rectángulo que contenga a A, y P una partición de R en subrectángulos Q tales que cada Q o bien está contenido en uno de los $\widetilde{V}_i$ o bien se corta sólo en la frontera con algunos de los $\widetilde{V}_i$ (esta partición P puede definirse utilizando todos los lados de los $\widetilde{V}_i$). Entonces es claro que

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{M} \widetilde{V}_j = \bigcup \{Q \, : \, Q \subseteq \widetilde{V}_j \text{ para algún } j\},$$

y

$$U(1_A, P) = \sum_{Q \in P : Q \cap A \neq \emptyset} v(Q) \leq \sum_{Q \in P : \exists j : Q \subseteq \widetilde{V}_j} v(Q) = \sum_{i=1}^{M} v(\widetilde{V}_i) \leq 2\varepsilon.$$

Este argumento prueba que $\inf\{U(1_A, P') : P' \, \text{partición de} \, R\} \leq 0$, es decir, la integral superior de 1_A es menor o igual que cero, y como por otra parte la integral inferior de 1_A es obviamente no negativa (puesto que $1_A \geq 0$), resulta que las integrales inferior y superior han de ser ambas iguales a cero. Es decir, 1_A es integrable y su integral es cero, lo cual equivale a decir que A tiene volumen y $v(A) = 0$. □

Como veremos más adelante, muchas veces es útil poder considerar recubrimientos numerables (y no sólo finitos) por rectángulos. Esta idea da lugar a la definición de conjunto de medida cero, que en general no equivale a la de volumen cero, pero que sin embargo está estrechamente relacionada con ella (se verá que un conjunto A tiene volumen si y sólo si su frontera tiene medida cero: corolario 3.2 del capítulo siguiente).

Definición 2.6 Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice que tiene *medida cero* si para todo $\varepsilon > 0$ existe una familia numerable o finita de rectángulos $Q_1, Q_2, ...$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j) \leq \varepsilon.$$

Debe hacerse notar que estas definiciones dependen del espacio ambiente en el que se trabaja. Por ejemplo, la recta real, considerada como un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$, tiene medida cero, pero como subconjunto de $\mathbb{R}$ no tiene esta propiedad (ver el ejercicio 2.15).

Observación 2.7 Todo conjunto de volumen cero tiene medida cero. El recíproco no es cierto, puesto que hay conjuntos de medida cero que no tienen volumen. Por ejemplo, $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ tiene medida cero (todo conjunto numerable tiene medida cero), y sin embargo no tiene volumen (su función característica no es integrable Riemann). No obstante, si A tiene volumen, entonces su volumen es cero si y sólo si tiene medida cero (ver problema 2.19). También es fácil ver que si A es compacto entonces A tiene medida cero si y sólo si tiene volumen cero (problema 2.18).

Observación 2.8 Si A tiene medida cero y $B \subseteq A$, entonces B tiene también medida cero.

Es claro que la union finita de conjuntos de volumen cero tiene volumen cero. Una de las principales ventajas de poder considerar conjuntos de medida cero es que la unión numerable de conjuntos de medida cero tiene también medida cero (lo que no es cierto de los conjuntos de volumen cero, como prueba el ejemplo de la observación 2.7 anterior):

Teorema 2.9 *Sean $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de conjuntos de medida cero en $\mathbb{R}^n$. Entonces su unión $A = \cup A_j$ tiene medida cero.*

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Como cada A_i tiene medida cero, existe un recubrimiento numerable de A_i por rectángulos $B_{ij}, j \in \mathbb{N}$, tales que

$$\sum_{j=1}^{\infty} v(B_{ij}) \leq \varepsilon/2^i.$$

Entonces es claro que la colección numerable de rectángulos formada por todos los B_{ij}, $i, j \in \mathbb{N}$ recubre la unión $A = \cup A_j$, y las sumas de los volúmenes de todos los rectángulos B_{ij} es menor o igual que ε, ya que

$$\sum_{i,j\in\mathbb{N}} v(B_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} v(B_{ij}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

Problemas

2.10 Probar que si $E_1, ..., E_k$ tienen contenido cero en $\mathbb{R}^n$ entonces $\bigcup_{j=1}^k E_j$ también tiene contenido cero.

2.11 Demostrar que si E tiene contenido cero en $\mathbb{R}^n$ entonces su adherencia $\overline{E}$ también lo tiene.

2.12 Supongamos que $E \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida cero. ¿Es cierto que su adherencia también tiene medida cero?

2.13 Demostrar que en la definición de contenido cero y de medida cero pueden sustituirse los rectángulos cerrados por rectángulos abiertos.

2.14 Demostrar también que pueden sustituirse los rectángulos por cubos en la definición de contenido cero y medida cero.

2.15 Probar que la recta real, considerada como subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$, tiene medida cero.

2.16 Demostrar que un rectángulo *no* tiene medida cero. Concluir que si A tiene medida cero, entonces A tiene interior vacío. El recíproco no es cierto; ver el problema 2.21.

2.17 Probar que si A es un conjunto con volumen y $v(A) > 0$ entonces A tiene interior no vacío.

2.18 Probar que si A es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, entonces A tiene medida cero si y sólo si tiene volumen cero.

2.19 Demostrar que si A tiene volumen entonces su volumen es cero si y sólo si A tiene medida cero.

2.20 Sea C el conjunto de Cantor en $\mathbb{R}$. Probar que C tiene medida cero. Por tanto, existen conjuntos no numerables que tienen medida cero.

2.21 *Existen compactos cuyo interior es vacío y que* no *tienen medida cero.* De hecho, puede encontrarse un subconjunto compacto K del intervalo $[0, 1]$ con esta propiedad. En particular K no tiene volumen, ya que todo conjunto con volumen cuyo interior sea vacío debe tener volumen cero.

Indicación: Modificar apropiadamente la construcción del conjunto de Cantor (por ejemplo, dividir el intervalo unidad en cinco partes y quitar la del medio; dividir ahora en $5^2 = 25$ partes cada uno de los dos intervalos adyacentes al excluido, y eliminar la del medio. En cada paso multiplicar por cinco las subdivisiones del paso anterior y quitar el intervalo que queda en el medio de cada uno de los conservados en el paso precedente. Continuar el proceso indefinidamente).

2.22 *Existen abiertos que no tienen volumen.* Utilizando el ejercicio anterior, encontrar un subconjunto abierto del intervalo $(0,1)$ que no tenga volumen. Ver también el problema 3.25

2.23 Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función Lipschitziana, es decir, $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$ para todo $x, y \in A$. Probar que si $E \subset A$ tiene medida cero (respectivamente, contenido cero), entonces $f(E)$ también tiene medida cero (resp., contenido cero).

2.24 Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1. Probar que si $E \subset U$ tiene medida cero, entonces $f(E)$ también tiene medida cero.
Indicación: Expresar U como unión de compactos, y utilizar el hecho de que f es Lipschitz sobre cada uno de estos compactos y el ejercicio anterior para obtener el resultado.

2.25 Demostrar que toda recta en $\mathbb{R}^2$ y todo plano en $\mathbb{R}^3$ tienen medida cero.

2.26 Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$. Demostrar que su gráfica $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$ tiene contenido cero en $\mathbb{R}^2$. Después, generalizar este resultado para funciones integrables sobre rectángulos de $\mathbb{R}^n$.

2.27 Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Probar que su gráfica $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^n\}$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$. *Indicación:* Utilizar el ejercicio anterior.

2.28 Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de clase C^1. Probar que la imagen de γ tiene contenido cero.

2.29 Sean U un abierto de $\mathbb{R}^m$, y $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1, con $m < n$. Probar que entonces $g(U)$ tiene siempre medida cero en $\mathbb{R}^n$.
Indicación: considerar $\mathbb{R}^m$ como subespacio de $\mathbb{R}^n$, y aplicar apropiadamente el problema 2.24.