# Capítulo 3

# El teorema de Lebesgue

En este capítulo estudiaremos un teorema que nos dice exactamente qué funciones son integrables y cuán grande puede ser la frontera de un conjunto para que éste tenga volumen. La respuesta de Lebesgue a estas dos preguntas fundamentales es la siguiente: una función es integrable si y sólo si el conjunto de sus puntos de discontinuidad tiene medida cero y, como consecuencia de esto, un conjunto tiene volumen si y sólo si su frontera tiene medida cero. Se trata de uno de los resultados fundamentales de la teoría de integración. Con este teorema, y al enfatizar la importancia del concepto de medida cero, H. Lebesgue abrió el camino para el desarrollo de la teoría de la medida y de una teoría de integración más flexible que la de Riemann. La teoría de la medida y la integral de Lebesgue son objeto de estudio en cursos más avanzados.

**Teorema 3.1** *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Extiéndase $f$ a todo $\mathbb{R}^n$ poniendo $f(x) = 0$ para $x \in X \setminus A$. Entonces, $f$ es integrable (Riemann) si y sólo si los puntos en los cuales la extensión $f$ es discontinua forman un conjunto de medida cero.*

Antes de demostrar el teorema de Lebesgue deduciremos de este resultado algunos corolarios importantes.

**Corolario 3.2** *Un subconjunto acotado $A$ de $\mathbb{R}^n$ tiene volumen si y sólo si su frontera $\partial A$ tiene medida cero.*

*Demostración*: Por la definición de conjunto con volumen y gracias al teorema anterior, basta demostrar que el conjunto de discontinuidades de la función característica $1_A$,

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A, \end{cases}$$

es precisamente la frontera de $A$, que denotamos $\partial A$. Veámoslo. Por un lado, si $x \in \partial A$, entonces cualquier entorno de $x$ corta tanto a $A$ como a $\mathbb{R}^n \setminus A$. Esto implica decir que en cualquier entorno de $x$ hay puntos $y$ tales que $1_A(y) - 1_A(x) = 1$, luego $1_A$ no puede ser continua en $x$. Por otra parte, si $x \notin \partial A$ entonces existe todo un entorno de $x$ que o bien queda dentro de $A$ o bien está contenido en $\mathbb{R}^n \setminus A$; en cualquiera de los casos resulta que $1_A$ es constante en todo un entorno de $x$ y por tanto es obviamente continua en $x$. Por consiguiente, $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : 1_A \,\text{discontinua en}\, x\}$. □

**Corolario 3.3** *Sea $A$ un subconjunto acotado y con volumen de $\mathbb{R}^n$. Cualquier función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ cuyos puntos de discontinuidad formen un conjunto de medida cero es integrable.*

*Demostración*: Sea $g$ la extensión de $f$ que coincide con ella sobre $A$ y que vale cero fuera de $A$. Si denotamos por $\mathrm{Disc}(f)$ el conjunto de los puntos de discontinuidad de $f$ en $A$, y por $\mathrm{Disc}(g)$ el conjunto de discontinuidades de la extensión $g$ en $\mathbb{R}^n$, es claro (por la misma razón que en la demostración del corolario anterior) que

$$\mathrm{Disc}(g) \subseteq \mathrm{Disc}(f) \cup \partial A,$$

y como tanto $\mathrm{Disc}(f)$ (por hipótesis) como $\partial A$ (por tener $A$ volumen y gracias al corolario anterior) tienen medida cero, su unión tiene medida cero, y por tanto el subconjunto de esta unión $\mathrm{Disc}(g)$ tiene medida cero. □

**Observación 3.4** Nótese que en el teorema 3.1 la integrabilidad de $f$ depende de su extensión. Por ejemplo, si $A$ es el conjunto de los racionales del intervalo $[0, 1]$ y $f = 1$, entonces $f$ restringida a $A$ es continua, pero su extensión canónica no es continua en ningún punto y en particular no es integrable, luego $f$ no es integrable sobre $A$ según la definición que se ha dado. Por otra parte, en el enunciado del corolario 3.3 *no* es necesario extender $f$ fuera de $A$ porque, como se ve en la prueba, el conjunto de puntos de discontinuidad de su extensión canónica no se va a incrementar significativamente, a lo sumo se añadiría la frontera de $A$, que es un subconjunto de medida cero ya que $A$ tiene volumen.

Una consecuencia inmediata del corolario anterior es lo siguiente:

**Corolario 3.5** *Sea $A$ un subconjunto acotado y con volumen de $\mathbb{R}^n$. Cualquier función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ cuyos puntos de discontinuidad formen un conjunto finito o numerable es integrable.*

La mayoría de las funciones que se manejan en la práctica son continuas o continuas a trozos (es decir, continuas salvo en un conjuto finito de puntos), y por tanto, según el corolario anterior, son también integrables.

Antes de pasar a la demostración del teorema de Lebesgue, y para concluir con la exposición de los resultados principales de este capítulo, probaremos otros dos teoremas que complementan los anteriores.

**Teorema 3.6** *Sea $A$ un subconjunto acotado y de medida cero de $\mathbb{R}^n$, y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces*

$$\int_A f = 0.$$

*Demostración*: Sea $S$ un rectángulo que contenga a $A$, y extendamos $f$ a $S$ poniendo $f(x) = 0$ para $x \in S \setminus A$. Sea $P$ una partición cualquiera de $S$ en subrectángulos $S_1, ..., S_N$, y sea $M$ una cota superior de $f$ en $A$. Entonces se tiene

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{N} m(f, S_i)v(S_i) \leq M \sum_{i=1}^{N} m(1_A, S_i)v(S_i).$$

Supongamos que $m(1_A, S_i) \neq 0$ para algún $i$; entonces $S_i \subseteq A$; pero esto es imposible, pues ningún conjunto de medida cero puede contener un rectángulo (ver ejercicio 2.16). Por tanto, $m(1_A, S_i) = 0$ para todo $i$, y en particular $\sum_{i=1}^{N} m(1_A, S_i)v(S_i) = 0$, lo que según la desigualdad anterior implica que $L(f, P) \leq 0$.

Por otra parte, como $M(f, S_i) = -m(-f, S_i)$, se tiene que

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{N} M(f, S_i)v(S_i) = -\sum_{i=1}^{N} m(-f, S_i)v(S_i) = -L(-f, P);$$

pero por la misma razón que antes, $L(-f, P) \leq 0$, luego $-L(-f, P) = U(f, P) \geq 0$.

Así, hemos probado que, para toda partición $P$ de $S$,

$$L(f, P) \leq 0 \leq U(f, P)$$

y, como $f$ es integrable, esto significa que $\int_A f = 0$. $\Box$

**Teorema 3.7** *Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x$, y además $\int_A f(x)dx = 0$, entonces el conjunto*

$$\{x \in A : f(x) \neq 0\}$$

*tiene medida cero.*

*Demostración*: Para cada $m \in \mathbb{N}$, probaremos que el conjunto $A_m = \{x \in A : f(x) > 1/m\}$ tiene contenido cero. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Sea $S$ un rectángulo que contenga a $A$, y extendamos $f$ a $S$ poniendo $f(x) = 0$ para $x \in S \setminus A$ como de costumbre. Sea $P$ una partición de $S$ tal que $U(f, P) < \varepsilon/m$; existe una tal partición porque $\int_A f = 0$. Sean $S_1, ..., S_K$ los subrectángulos de la partición $P$ cuyas intersecciones con $A_m$ son no vacías; entonces se tiene $mM(f, S_i) > 1$ para $i = 1, ..., K$, y por tanto

$$\sum_{i=1}^{K} v(S_i) \leq \sum_{i=1}^{K} mM(f, S_i)v(S_i) \leq mU(f, P) < \varepsilon.$$

Es decir, los rectángulos $S_1, ..., S_K$ forman un recubrimiento de $A_m$ tal que $\sum_{i=1}^{K} v(S_i) < \varepsilon$. Esto prueba que $A_m$ tiene contenido cero. En particular, $A_m$ tiene medida cero, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, como

$$\{x \in A : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m,$$

y puesto que la unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero, se deduce que este conjunto tiene medida cero. $\Box$

El resto de este capítulo lo dedicaremos a la demostración del teorema de Lebesgue 3.1. Sea $B$ un rectángulo que contenga a $A$. Debemos probar que la función $f$ es integrable en $A$ si y sólo si el conjunto de discontinuidades de la función extendida $g$ (que coincide con $f$ sobre $A$ y es cero fuera de $A$) tiene medida cero.

Para probar esto, es útil tener una medida de *cuán mala* es una discontinuidad determinada. A tal fin, definimos la *oscilación de una función en un punto*.

**Definición 3.8** Sea $h : W \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un abierto $W$ de $\mathbb{R}^n$. Se define la oscilación de $h$ en un punto $x_0 \in W$ como

$$O(h, x_0) = \text{ínf}\{\sup\{|h(x) - h(y)| : x, y \in U\} \mid U \,\text{es un entorno de}\; x_0\}.$$

Alternativamente, si esta definición resulta algo indigesta, para cada entorno $U$ de $x$ podemos definir la oscilación de $h$ en $U$ como

$$O(h, U) = \sup\{|h(x) - h(y)| : x, y \in U\},$$

y la oscilación de $h$ en el punto $x_0$ sería entonces

$$O(h, x_0) = \text{ínf}\{O(h, U) \mid U \, \text{es un entorno de } \, x_0\}.$$

Claramente se tiene que $O(h, x_0) \geq 0$. Cuanto más grande sea este número, peor será el comportamiento de la función $h$ en las proximidades de $x_0$. Como cabe esperar, una función es continua en un punto si y sólo si su oscilación en ese punto es cero.

**Lema 3.9** *Sea $h : W \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un abierto $W$ de $\mathbb{R}^n$, y sea $x_0 \in W$. Entonces, $h$ es continua en $x_0$ si y sólo si $O(h, x_0) = 0$.*

La demostración de este lema es sencilla y se deja como ejercicio. Ahora ya podemos comenzar la demostración del teorema de Lebesgue.

**Paso 1**. Supongamos que el conjunto de discontinuidades de $g$ tiene medida cero, y veamos que $g$ es integrable.

Fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sea $M$ tal que $|g(x)| \leq M$ para todo $x \in B$. Denotemos por $D$ el conjunto de los puntos de discontinuidad de $g$. Sea $D_\varepsilon = \{x \in B : O(g, x) \geq \varepsilon\}$. Por el lema anterior, se tiene que $D_\varepsilon \subseteq D$. Es fácil ver que $D_\varepsilon$ es compacto (ejercicio 3.13).

Como $D_\varepsilon$ tiene medida cero (por ser un subconjunto de $D$, que tiene medida cero), existe una colección numerable de rectángulos $B_1, B_2, ...$ tales que $D_\varepsilon \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{int}(B_i)$ y $\sum_{i=1}^{\infty} v(B_i) < \varepsilon$. Pero $D_\varepsilon$ es compacto, luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $D_\varepsilon \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} \text{int}(B_i)$ y, por supuesto, $\sum_{i=1}^{N} v(B_i) < \varepsilon$.

Ahora, sea $P_0$ una partición de $B$ tal que cada subrectángulo de $P_0$ o bien está contenido en alguno de los $B_i$ o bien su interior es disjunto con los $B_i$. Podemos dividir los subrectángulos de $P_0$ en dos clases $C_1$ y $C_2$ (no necesariamente disjuntas):

$$C_1 = \{Q \in P_0 \mid \exists i \in \{1, ..., N\} : Q \subseteq B_i\}, \text{ y } \; C_2 = \{Q \in P_0 \mid Q \cap D_\varepsilon = \emptyset\},$$

de modo que $P_0 = C_1 \cup C_2$.

Sea $S$ un subrectángulo de $C_2$; entonces la oscilación de $g$ en cada punto de $S$ es menor que $\varepsilon$. Por tanto, para cada $x \in S$, existe un entorno abierto $U_x$ de $x$ tal que

$$M_U(g) - m_U(g) = \sup\{|g(z) - g(y)| : y, z \in U\} < \varepsilon,$$

donde $M_U(g) = \sup\{g(z) : z \in U\}$ y $m_U(g) = \inf\{g(z) : z \in U\}$. Ahora, como $S$ es compacto y $S \subseteq \bigcup_{x\in S} U_x$, existe una cantidad finita de puntos $x_1^s, ..., x_{K_s}^s \in S$ tal que

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{K_s} U_i^s,$$

donde se denota $U_i^s = U_{x_i^s}$. Escojamos una partición $P_S$ de $S$ tal que cada subrectángulo de $P_S$ está contenido en alguno de los $U_i^s$ (esto es siempre posible; ver el ejercicio 3.15).

Sea ahora $P$ una partición de $B$ tal que cada subrectángulo $Q$ de $P$ o bien está contenido en alguno de los subrectángulos de las particiones $P_s$ anteriores o bien su interior es disjunto con los subrectángulos de las $P_s$ y, en este caso, $Q$ está contenido en alguno de los rectángulos que son miembros de la clase $C_1$. Una tal partición puede definirse utilizando todos los lados de todos los miembros de $C_1$ y de las particiones $P_s$. Podemos dividir esta partición $P$ en dos clases (ahora disjuntas, aunque esto no tenga especial relevancia), $C_2'$ y $C_1'$, según se dé una u otra de las dos posibilidades, es decir,

$$C_2' = \{Q \in P \mid \exists S \in C_2 \, \exists R \in P_s : Q \subseteq R\},$$

y

$$C_1' = \{Q \in P \mid \forall S \in C_2 \, \forall R \in S : \mathrm{int}(Q) \cap R = \emptyset, \text{ y } \exists T \in C_1 : Q \subseteq T\},$$

de forma que $P = C_1' \cup C_2'$. Para esta partición $P$ tenemos que

$$\begin{aligned} &U(g,P) - L(g,P) \leq \\ &\sum_{Q\in C_2'} (M_Q(g) - m_Q(g))v(Q) + \sum_{Q\in C_1'} (M_Q(g) - m_Q(g))v(Q) \leq \\ &\varepsilon v(B) + \sum_{Q\in C_1'} 2Mv(Q) \leq \varepsilon v(B) + 2M\varepsilon, \end{aligned}$$

ya que $\sum_{Q\in C_1'} v(Q) \leq \sum_{i=1}^N v(B_i) < \varepsilon$. Como $v(B)$ y $M$ no dependen de $\varepsilon$, y $\varepsilon$ es arbitrario, utilizando el criterio de integrabilidad de Riemann se concluye que $g$ (y por tanto $f$) es integrable.

**Paso 2.** Ahora supongamos que $g$ es integrable, y veremos que el conjunto $D$ de los puntos de discontinuidad de $g$ tiene medida cero.

Es claro que $D = \bigcup_{n=1}^\infty D_{1/n}$, donde $D_{1/n} = \{x \in B : O(g,x) \geq 1/n\}$. Puesto que la unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero, bastará probar que cada uno de estos conjuntos tiene medida cero.

Veámoslo. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, como $g$ es integrable, existe una partición $P$ de $B$ tal que

$$U(g,P) - L(g,P) = \sum_{S\in P}(M_S(g) - m_S(g))v(S) < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Ahora podemos escribir $D_{1/n} = E_1 \cup E_2$, donde

$$E_1 = \{x \in D_{1/n} \mid \exists S \in P : x \in \partial S\},$$

y

$$E_2 = \{x \in D_{1/n} \mid \exists S \in P : x \in \operatorname{int}(S)\};$$

aquí $\partial S$ e $\operatorname{int}(S)$ denotan la frontera y el interior del rectángulo $S$, respectivamente. Es claro que la frontera de un rectángulo tiene volumen cero (ejercicio 3.16), y como $E_1$ está contenido en una unión finita de fronteras de rectángulos, se deduce que $E_1$ tiene volumen cero; por tanto existe una colección de rectángulos $C_1$ tales que $E_1 \subseteq \bigcup_{R\in C_1} R$ y $\sum_{R\in C_1} v(R) < \varepsilon/2$. Por otra parte, sea $C_2$ el conjunto de los subrectángulos de $P$ que tienen en su interior algún elemento de $D_{1/n}$ (de $E_2$ para ser más precisos). Entonces, si $S \in C_2$, existe $z_s$ en el interior de $S$ tal que $z_s \in D_{1/n}$, y por tanto,

$$M_S(g) - m_S(g) = O(g,S) \geq O(g,z_s) \geq \frac{1}{n},$$

de donde deducimos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{S\in C_2} v(S) &\leq \sum_{S\in C_2}(M_S(g) - m_S(g))v(S)\\ &\leq \sum_{S\in P}(M_S(g) - m_S(g))v(S) < \frac{\varepsilon}{2n},\end{aligned}$$

y así $\sum_{S\in C_2} v(S) < \varepsilon/2$. Entonces, $C = C_1 \cup C_2$ es una colección finita de rectángulos que recubre el conjunto $D_{1/n}$, con

$$\sum_{R\in C} v(R) \leq \sum_{R\in C_1} v(R) + \sum_{R\in C_2} v(R) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto prueba que $D_{1/n}$ tiene volumen cero.

# Problemas

**3.10** Sea $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. Probar que $O(f, 0) = 2$.

**3.11** Sea $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$, y $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Probar que $O(f, x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

**3.12** Sea $h : W \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un abierto $W$ de $\mathbb{R}^n$, y sea $O(h, x)$ la oscilación de $h$ en $x$. Probar que $h$ es continua en $x_0$ si y sólo si $O(h, x_0) = 0$.

**3.13** Sea $D_\varepsilon = \{x \in B : O(g, x) \geq \varepsilon\}$, donde $g$ es una función acotada definida en un rectángulo $B$. Demostrar que $D_\varepsilon$ es compacto para cada $\varepsilon > 0$.

**3.14** Sea $g$ una función acotada definida en un rectángulo abierto $B$, y para cada abierto $U$ contenido en $B$ definamos $M_U(g) = \sup\{g(z) : z \in U\}$ y $m_U(g) = \text{ínf}\{g(z) : z \in U\}$. Probar que

$$M_U(g) - m_U(g) = \sup\{|g(z) - g(y)| : y, z \in U\} := O(g, U),$$

y por tanto

$$O(g, x) = \text{ínf}\{M_U(g) - m_U(g) \mid U \, \text{entorno abierto de } x\}.$$

**3.15** Sea $S$ un rectángulo cerrado, y $G_1, ..., G_k$ un recubrimiento finito de $S$ por conjuntos abiertos. Probar que existe una partición $P$ de $S$ tal que cada subrectángulo de $P$ está contenido en alguno de los abiertos $G_i$. *Indicación:* para cada $x \in S$ existen $i \in \{1, ..., k\}$ y $\delta_x > 0$ tales que $B_\infty(x, \delta_x) \subseteq G_i$; entonces $S \subseteq \bigcup_{x \in S} B_\infty(x, \delta_x)$. Usar ahora que $S$ es compacto, y recordar que las bolas $B_\infty(x, r)$ tienen forma de cubos.

**3.16** Demostrar que la frontera de un rectángulo tiene siempre volumen cero.

**3.17** Demostrar que si $A$ y $B$ tienen volumen, entonces $A \cup B$, $A \cap B$ y $A \setminus B$ también tienen volumen.

**3.18** Sea $f(x, y) = 1$ para $x \neq 0$, y $f(0, y) = 0$ para todo $y$. Probar que $f$ es integrable en cualquier rectángulo de $\mathbb{R}^2$, y hallar estas integrales.

**3.19** Sea $f(x) = \text{sen}(1/x)$ para $x > 0$, y $f(0) = 0$. +Es $f$ integrable en $[0, 1]$?

**3.20** Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \operatorname{sen}\frac{1}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ x^2 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Probar que $f$ es integrable en el círculo unidad abierto, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

**3.21** Decidir si las functiones que siguen son integrables en los conjuntos indicados:

(a) $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} y & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \\ x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

con $A = \{(x,y) : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \leq 1\}$.

(b) $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x^2 + y^2 < 1/2 \quad \text{o bien} \quad y = 0; \\ x \sin(\frac{1}{y}) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(c) $h : C \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y; \\ x & \text{si } y < x, \end{cases}$$

con $C = \{(x,y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

**3.22** Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ si $x$ es irracional, y $f(x) = 1/m$ cuando $x$ es racional y está expresado en la forma $x = n/m$ con $n$ y $m$ primos entre sí. Probar que $f$ es continua en $x$ si y sólo si $x$ es irracional. Concluir que $f$, pese a ser discontinua en un subconjunto denso de $[0,1]$, es integrable en $[0,1]$.

**3.23** Para cada $B \subseteq \mathbb{R}^n$ definamos

$$\lambda(B) = \operatorname{ínf}\{\sum_{i=1}^{\infty} v(S_i) \mid (S_i) \text{ recubrimiento de } B \text{ por rectángulos abiertos}\}.$$

Probar que si $B$ tiene volumen entonces $\lambda(B) = v(B)$.
*Observación:* A $\lambda$ se le llama medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

**3.24** Si $(B_i)$ es una sucesión de conjuntos con volumen que son disjuntos dos a dos y $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ tiene volumen, entonces

$$v(B) = \sum_{i=1}^{\infty} v(B_i).$$

*Indicación:* Usar el problema anterior.

**3.25** Sea $r_1, r_2, ...$ una enumeración de los racionales de $[0, 1]$, y sea

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} (r_k - \frac{1}{5^k}, r_k + \frac{1}{5^k})$$

Probar que $U$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ que *no* tiene volumen. *Indicación:* usar el problema 3.23.

**3.26** Sea $A$ un subconjunto abierto y con volumen de $\mathbb{R}^n$, y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x$. Supongamos que existe $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) > 0$. Demostrar que entonces $\int_A f > 0$.

**3.27** Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables. Supongamos que $\int_A |f - g| = 0$. Probar que entonces $f(x) = g(x)$ para casi todo $x$, es decir, salvo en quizás en un subconjunto de $A$ de medida cero.

**3.28** Sean $A$ un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$, y $(f_k)$ una sucesión de funciones que converge uniformemente en $A$ a otra función $f$. Sea $S$ un rectángulo que contenga a $A$, y extendamos cada una de estas funciones a $S$ haciéndolas valer cero en $S \setminus A$, como de costumbre. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $D_k$ el conjunto de los puntos de discontinuidad de la función $f_k$ (extendida). Demostrar que el conjunto $D$ de los puntos de discontinuidad de $f$ está contenido en $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$. *Indicación:* Recordar que el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas en un conjunto es continuo en ese conjunto.

**3.29** Utilizando el problema anterior, probar que si $A$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$, y $(f_k)$ una sucesión de funciones integrables que converge uniformemente en $A$ a otra función $f$, entonces $f$ es también integrable en $A$.

**3.30** En las hipótesis del problema anterior, probar que además se tiene que

$$\lim_{k \to \infty} \int_A f_k = \int_A f.$$

*Indicación:* La prueba usual que se da de este hecho para funciones de una variable se generaliza sin dificultad al caso de funciones de varias variables.