Capítulo 5

El teorema de Fubini

Hasta ahora hemos caracterizado las funciones que son integrables y hemos estudiado las propiedades básicas de la integral, pero en realidad no sabemos cómo calcular las integrales incluso de las funciones más simples en los recintos menos complicados. El teorema de Fubini, junto con el teorema del cambio de variable, que estudiaremos más adelante, es una de las herramientas fundamentales que nos permitirá hallar el valor de una integral múltiple (es decir, de una función de varias variables), al reducirlo a la integración iterada de unas cuantas funciones de una sola variable.

Comenzaremos por dar la versión del teorema de Fubini en el plano $\mathbb{R}^2$, que luego se extenderá sin dificultad al caso general.

Teorema 5.1 *Sea $A = [a,b] \times [c,d]$ un rectángulo de $\mathbb{R}^2$, y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, tal que las funciones $f_x : [c,d] \longrightarrow$ definidas por $f_x(y) = f(x,y)$ son integrables en $[c,d]$, para todo $x \in [a,b]$. Entonces, la función $x \mapsto \int_c^d f(x,y)dy$ es integrable en $[a,b]$, y*

$$\int_A f = \int_a^b \big(\int_c^d f_x(y)dy \big) dx,$$

o, con una notación más práctica,

$$\int_A f = \int_a^b \big(\int_c^d f(x,y)dy \big) dx.$$

Análogamente, si se supone que $\int_a^b f(x,y)dx$ existe para cada $y \in [c,d]$, se obtiene que

$$\int_A f = \int_c^d \big(\int_a^b f(x,y)dx \big) dy.$$

Observación 5.2 Si f es continua entonces las funciones f, f_x y f_y (con $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$) son todas integrables, y entonces se obtiene que

$$\int_A f = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy.$$

Este resultado se puede aplicar a recintos (acotados) A más generales que rectángulos, extendiendo la función a un rectángulo que contenga a A (haciéndola valer cero fuera de A, como es habitual) y usando entonces el teorema de Fubini. El siguiente corolario nos muestra una manera de hacer esto; el resultado puede utilizarse eficientemente para descomponer una región complicada en regiones más pequeñas a cada una de las cuales se aplica entonces el corolario.

Corolario 5.3 *Sean $\varphi, \psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $\varphi(x) \leq \psi(x)$ para todo $x \in [a,b]$, y sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua (o continua salvo en una cantidad finita de puntos). Entonces*

$$\int_A f = \int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\Big)dx.$$

Antes de dar la demostración del teorema de Fubini y su corolario enunciaremos el teorema en su forma más general.

Teorema 5.4 *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ rectángulos, y $f : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable tal que las funciones $f_x : B \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f_x(y) = f(x,y)$ son integrables sobre B para todo $x \in A$. Entonces, la función $x \mapsto \int_B f(x,y)dy$ es integrable en A, y*

$$\int_{A\times B} f = \int_A \Big(\int_B f(x,y)dy\Big)dx.$$

Análogamente, si se supone que $\int_A f(x,y)dx$ existe para cada $y \in B$, entonces

$$\int_{A\times B} f = \int_B \Big(\int_A f(x,y)dx\Big)dy.$$

De igual manera que el corolario 5.3 puede demostrarse, a partir de la versión general del teorema de Fubini, el siguiente resultado, muy útil a la hora de evaluar integrales en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Corolario 5.5 *Sea A un conjunto con volumen de $\mathbb{R}^n$, sean $\varphi, \psi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $\varphi(x) \leq \psi(x)$ para todo $x \in A$, y sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in A, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$. Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua (o continua salvo en una cantidad finita de puntos). Entonces*

$$\int_D f = \int_A \big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \big) dx.$$

Demostración del teorema 5.1.

Sea $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)dy.$$

Tenemos que ver que g es integrable sobre $[a,b]$, y que

$$\int_A f = \int_a^b g(x)dx.$$

Sean $P_{[a,b]}$ una partición cualquiera de $[a,b]$ en subintervalos $S_j = [s_{j-1}, s_j]$, donde $a = s_0 < s_1 < ... < s_N = b$, y sea $P_{[c,d]}$ una partición de $[c,d]$ en subintervalos $T_j = [t_{j-1}, t_j]$, donde $c = t_0 < t_1 < ... < t_M = d$. Sea entonces P_A la partición de A dada por los rectángulos

$$R_{ij} = S_i \times T_j,$$

con $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq M$. Nótese que cualquier partición del rectángulo A se obtiene de esta manera, como producto de particiones de los lados de A. Se tiene que

$$L(f, P_A) = \sum_{i,j} m(f, R_{ij}) v(R_{ij}) = \sum_{i=1}^{N} \big(\sum_{j=1}^{M} m(f, R_{ij}) v(T_j) \big) v(S_j).$$

Además, para cada $x \in S_i$ y para cada j es $m(f, R_{ij}) \leq m(f_x, T_j)$. Por tanto, sumando en j estas desigualdades, obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{M} m(f, R_{ij}) v(T_j) \leq \sum_{j=1}^{M} m(f_x, T_j) v(T_j) \leq \int_c^d f_x(y)dy = g(x).$$

Como estas desigualdades valen para cualquier $x \in S_i$, podemos tomar ínfimos en x y obtener

$$\sum_{j=1}^{M} m(f, R_{ij}) v(T_j) \leq m(g, S_i)$$

para cada i, y entonces, sumando en i,

$$L(f, P_A) \leq \sum_{i=1}^{N} m(g, S_i) v(S_i) \leq L(g, P_{[a,b]}).$$

De aquí, y de un argumento análogo para supremos y sumas superiores, deducimos que

$$L(f, P_A) \leq L(g, P_{[a,b]}) \leq U(g, P_{[a,b]}) \leq U(f, P_A),$$

Como esto vale para cualquier partición P_A de A y, lo que es lo mismo, para cualesquiera particiones $P_{[a,b]}$ y $P_{[c,d]}$ de $[a, b]$ y $[c, d]$ respectivamente, y f es integrable, se deduce inmediatamente de estas desigualdades que g es integrable sobre $[a, b]$, y

$$\int_A f = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)dy \Big) dx.$$

Observación 5.6 Es claro que la misma prueba, sustituyendo intervalos por rectángulos y haciendo los pertinentes cambios de notación, sirve para establecer la versión general (teorema 5.4) del teorema de Fubini. La redacción de dicha prueba se deja como ejercicio para el lector.

Demostración del corolario 5.3.

Sea $S = [a, b] \times [c, d]$ un rectángulo cerrado que contenga a A, y extendamos f a S poniendo $f = 0$ en $S \setminus A$ como es habitual. Por el ejercicio 2.26, las gráficas de φ y ψ, es decir los conjuntos $G(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) : x \in [a, b]\}$ y $G(\psi) = \{(x, \psi(x)) : x \in [a, b]\}$ tienen medida cero. Es claro que el conjunto de las discontinuidades de la función extendida f está contenido en la unión de estas dos gráficas, y por tanto tiene también medida cero. Luego, por el teorema de Lebesgue, f es integrable en S. Por otro lado, para cada $x \in [a, b]$, f_x es continua en $[c, d]$, salvo quizás en los puntos $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, y por tanto, todas las f_x son integrables. Entonces, podemos aplicar el teorema de Fubini, lo que nos da, teniendo en cuenta que cada f_x es cero en $[c, \varphi(x)] \cup [\psi(x), d]$, que

$$\int_A f = \int_S f = \int_a^b \Big(\int_c^d f_x(y)dy \Big) dx = \int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy \Big) dx.$$

Ejemplos y ejercicios

5.7 Calcular $\int_A (x+y)x dx dy$, donde $A = [0,1] \times [0,1]$.

5.8 Calcular las siguientes integrales iteradas:

(a) $\int_{-1}^{1} \int_0^1 (x^4 y + y^2) dy dx$

(b) $\int_0^1 \int_{e^x}^{e^{2x}} x \log y dy dx$

(c) $\int_0^1 \int_0^{\frac{arcseny}{y}} y \cos(xy) dx dy$

5.9 Expresar las integrales iteradas siguientes como integrales múltiples sobre un recinto, dibujar el recinto y cambiar el orden de intergración; finalmente, hallar el valor de las integrales usando el orden de integración que dé lugar a los cálculos más simples.

(a) $\int_{-3}^{2} \int_0^{y^2} (x^2 + y) dx dy$

(b) $\int_1^2 \int_0^{\log x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}} dy dx$

(c) $\int_{-1}^{1} \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dy dx$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos x} y \sin x dx dy$

(e) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y (x + 2y + 3z) dz dy dx$

(f) $\int_0^1 \int_0^{f(y)} xy dx dy$, donde $f(y) = \text{mín}\{1, \log \frac{1}{y}\}$.

(g) $\int_0^1 \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} (1-y^2)^{1/2} dx y dx$

5.10 Sea $A = [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 2y & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Decidir si f es integrable en A.

(b) Calcular $\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y) dy) dx$ si existe.

(c) Calcular $\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y) dx) dy$ si existe.

5.11 Cambiar el orden de integración en las siguientes integrales iteradas:

(a) $\int_0^a \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dxdy$

(b) $\int_0^a \int_{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{b} f(x,y)dydx$

(c) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)dzdydx$

(d) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dzdxdy$

5.12 *Diferenciación bajo el signo de la integral.* Sea $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $[a,b] \times [c,d]$. Definamos

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx.$$

Probar que F es derivable y que

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

Indicación: Usando el Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que

$$F(u) = \int_a^b f(x,u)dx = \int_a^b (\int_c^u \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy + f(x,c))dx.$$

5.13 Sea $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con $\frac{\partial f}{\partial y}$ continua en $[a,b] \times [c,d]$. Definamos

$$F(x,y) = \int_a^x f(t,y)dt.$$

(a) Calcular $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$

(b) Si $G(x) = \int_a^{g(x)} f(t,x)dt$, calcular $G'(x)$.

5.14 Calcular las integrales siguientes

(a) $\int_D x^2 y dxdy$, siendo D el triángulo de vértices $(0,0), (0,1)$ y $(1,0)$.

(b) $\int_D ye^{-xy} dxdy$, siendo D el cuadrado de vértices $(0,0), (0,1), (1,0)$ y $(1,1)$.

(c) $\int_D x dxdy$, siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \sqrt{\pi}, 0 \leq y \leq \sin x^2\}$.

(d) $\int_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy$, siendo D el interior de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(e) $\int_D |\max\{x, y\}| dxdy$, siendo $D = [-2, 2] \times [-1, 1]$.

5.15 Probar la siguiente generalización del corolario del teorema de Fubini. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado, y $\varphi, \psi : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funciones continuas tales que $\varphi_j(x) \leq \psi_j(x)$ para todo $x \in A$, $1 \leq j \leq m$. Sea

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : x \in A,\ \varphi_j(x) \leq y_j \leq \psi_j(x),\ 1 \leq j \leq m\}.$$

Para cada $x \in A$ definamos $B_x \subset \mathbb{R}^n$ por

$$B_x = \{y \in \mathbb{R}^m : \varphi_j(x) \leq y_j \leq \psi_j(x),\ 1 \leq j \leq m\}.$$

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, y definamos $f_x : B_x \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f_x(y) = f(x, y)$, y $g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \int_{B_x} f_x.$$

Entonces g es integrable sobre A, y

$$\int_D f = \int_A g.$$

5.16 Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos con volumen, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables. Definamos

$$F(x, y) = f(x) + g(y), \text{ y } G(x, y) = f(x)g(y).$$

Hallar $\int_{A \times B} F(x, y) dxdy$ y $\int_{A \times B} G(x, y) dxdy$ en función de $\int_A f$, $\int_B g$, $v(A)$ y $v(B)$.

5.17 Hallar el volumen de la región acotada por $z = x^2 + 3y^2$, $z = 9 - x^2$.

5.18 Hallar el volumen de la región acotada por $x^2 + 2y^2 = 2$, $z = 0$, $x + y + 2z = 2$.

5.19 Sea A la región de $\mathbb{R}^3$ acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$, con $x \geq 0$, $y \geq 0$. Calcular la integral $\int_A x dxdydz$.

5.20 Calcular la integral $\int_A y e^{-xy} dxdydz$, donde $A = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

5.21 Calcular las siguientes integrales iteradas y dibujar las regiones A determinadas por los límites de integración:

(a) $\int_0^1 (\int_1^{e^x} (x+y)dy)dx$;

(b) $\int_0^1 (\int_{x^3}^{x^2} ydy)dx$.

5.22 Sea D la región acotada por los ejes positivos x e y y la recta $3x+4y = 10$. Calcular $\int_D (x^2+y^2)dxdy$.

5.23 Sea D la región dada como el conjunto de los (x, y) del plano tales que $-\varphi(x) \leq y \leq \varphi(x)$ y $a \leq x \leq b$, donde φ es una función continua no negativa en el intervalo $[a, b]$. Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en D tal que $f(x, y) = -f(x, -y)$ para todo $(x, y) \in D$. Probar que

$$\int_D f(x, y)dxdy = 0.$$

5.24 Dibujar la región correspondiente a cada una de las sigientes integrales dobles, cambiar el orden de integración y evaluar la integral usando el orden que sea más adecuado:

(a) $\int_0^1 (\int_x^1 xydy)dx$

(b) $\int_0^1 (\int_{2-y}^1 (x+y)^2 dx)dy$

(c) $\int_{-1}^1 (\int_{|y|}^1 (x+y)^2 dx)dy$

5.25 Calcular $\int_W x^2 \cos z dxdydz$, donde W es la región acotada por los planos $z = 0$, $z = \pi$, $y = 0$, $x = 0$ y $x + y = 1$.

5.26 Integrar $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ sobre la porción del primer octante $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, cortada por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

5.27 Utilizar integrales triples para hallar el volumen del sólido T de $\mathbb{R}^3$ limitado superiormente por el cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ e inferiormente por el paraboloide elíptico $z = x^2 + 3y^2$.