Capítulo 8

Teoremas de convergencia y derivación bajo el signo integral

En este capítulo estudiaremos sucintamente bajo qué circunstancias puede intercambiarse el orden de la integral con las operaciones de paso al límite más habituales en el análisis, tales como la convergencia de sucesiones y series de funciones o la derivación.

Una de las principales desventajas de la integral de Riemann frente a la de Lebesgue (que se estudia en cursos más avanzados) es que el límite puntual de una sucesión de funciones integrables Riemann no es en general integrable, y la convergencia puntual no es suficiente para poder intercambiar el orden de las operaciones límite e integral. Los ejemplos siguientes ilustrarán este hecho con más precisión.

Ejemplo 8.1 Sea $(r_j)_{j=1}^{\infty}$ una enumeración de los números racionales del intervalo $[0,1]$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definamos $f_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ como $f_k = 1_{\{r_1,\ldots,r_k\}}$, es decir $f(x) = 1$ si $x = r_j$ para algún j con $1 \leq j \leq k$, y $f(x) = 0$ en caso contrario. Si $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ y $f = 1_A$, es claro que

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$$

para todo $x \in [0,1]$. Cada f_k es integrable por ser igual a la función cero salvo en una cantidad finita de puntos. Sin embargo, $f = 1_A$ no es integrable.

Incluso cuando el límite puntual f de una sucesión de funciones integrables (f_k) en un conjunto A sea integrable, en general no será verdad que $\lim_{k\to\infty} \int_A f_k = \int_A f$, como prueba el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.2 Para cada $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, definamos $f_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_k(x) = \begin{cases} k^2 x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{k}; \\ 2k - k^2 x & \text{si } \frac{1}{k} \leq x \leq \frac{2}{k}; \\ 0 & \text{si } x \geq \frac{2}{k}, \end{cases}$$

y sea $f = 0$. Es claro que $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) = 0$ para todo x. Las funciones f_k son todas integrables, con $\int_0^1 f_k = 1$, y por supuesto $f = 0$ es integrable, con $\int_0^1 f = 0$. Obviamente,

$$1 = \lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k \neq \int_0^1 f = 0.$$

No obstante, cuando la convergencia de f_k a f es uniforme en A entonces sí es cierto que f es integrable Riemann cuando las f_k lo son, y se cumple que

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k = \int_A f.$$

Teorema 8.3 *Sea A un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$, y (f_k) una sucesión de funciones integrables que converge uniformemente en A a una función f. Entonces f es también integrable en A, y*

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k = \int_A f.$$

Demostración: Sea S un rectángulo que contenga a A, y extendamos cada una de las funciones f_k, y también f, a S, haciéndolas valer cero en $S \setminus A$. Es claro que estas extensiones tienen la propiedad que f_k converge a f uniformemente en S. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea D_k el conjunto de los puntos de discontinuidad de la función f_k (extendida). Sea

$$B = S \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k.$$

Es evidente que todas las funciones f_k son continuas en B, y además f_k converge uniformemente a f en $B \subseteq S$. Entonces, como el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas en un conjunto es continuo en ese conjunto, se tiene que f es continua en B. Por tanto, el conjunto D de los puntos de discontinuidad de f está contenido en $S \setminus B = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$, que tiene medida cero por ser unión numerable de conjuntos de medida cero (los D_k

tienen medida cero porque cada f_k es integrable). Luego D tiene también medida cero y así f es integrable.

Veamos ahora que $\lim_{k\to\infty}\int_A f_k = \int_A f$. Dado $\varepsilon > 0$, puesto que $f_k \to f$ uniformemente en S, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_0$ entonces

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{v(S)}$$

para todo $x \in S$.Entonces, si $k \geq k_0$, se tiene

$$|\int_A f_k - \int_A f| \leq \int_A |f_k - f| = \int_S |f_k - f| \leq \int_S \frac{\varepsilon}{v(S)} = \varepsilon.$$

Por tanto $\lim_{k\to\infty}\int_A f_k = \int_A f$.

De aquí se deduce inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 8.4 *Sea A un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$, y (f_k) una sucesión de funciones integrables tal que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformemente en A a una función f. Entonces $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ es también integrable en A, y*

$$\int_A f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_A f_k.$$

A continuación probamos un resultado que justifica la *derivación bajo el signo integral*. Utilizaremos la siguiente notación. Si $f : A\times B \subseteq \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, para cada $x_0 \in A$ consideramos la función $f_x : B \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$$

y, si existe la derivada de esta función f_{x_0} en un punto $y_0 \in B$, denotaremos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_{x_0}(y_0),$$

es decir, $\frac{\partial f}{\partial y}$ es la *derivada parcial* de f con respecto de la variable vectorial y. Obsérvese que, según esta definición, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ no es un número, sino una aplicación lineal. Entenderemos entonces que

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$$

denota la forma lineal que a cada $h \in \mathbb{R}^m$ le asigna el número

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)(h)dx.$$

Teorema 8.5 *Sea U un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, y sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que la función derivada $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existe y es continua en todo U. Entonces, si A y B son subconjuntos con volumen de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente, tales que B es abierto y $A \times B \subseteq U$, se tiene que la función $F : B \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$F(y) = \int_A f(x, y)dx$$

es diferenciable en B, y

$$F'(y) = \int_A \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$$

para todo $y \in B$.

Demostración: Para cada $(x, y) \in A \times B$, y $h \in \mathbb{R}^m$, por el teorema del valor medio sabemos que existe $c_{x,y,h}$ en el segmento $[y, y + h]$ tal que

$$f(x, y + h) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, c_{x,y,h})(h). \tag{1}$$

Como la función $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ es continua en el compacto U, es uniformemente continua en U y en cualquier subconjunto suyo; en particular $\frac{\partial f}{\partial y}$ es uniformemente continua en $A \times B$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\frac{\partial f}{\partial y}(x, z) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\| \leq \frac{\varepsilon}{v(A)}$$

para todos $z, y \in B$ tales que $\|z - y\| \leq \delta$, y en particular, como $\|c_{x,y,h} - y\| \leq \delta$ por estar $c_{x,y,h}$ en el segmento $[y, y + h]$ y ser $\|h\| \leq \delta$, se tiene que

$$\|\frac{\partial f}{\partial y}(x, c_{x,y,h}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\| \leq \frac{\varepsilon}{v(A)} \tag{2}$$

si $(x, y) \in A \times B$ y $\|h\| \leq \delta$. Entonces, usando (1) y (2) e integrando en x,

obtenemos que, para todos $y \in B$ y $h \in \mathbb{R}^m$ con $\|h\| \leq \delta$,

$$\begin{aligned}
&\big|F(y+h) - F(y) - \int_A \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(h)dx\big| \\
&= \big|\int_A f(x,y+h)dx - \int_A f(x,y)dx - \int_A \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(h)dx\big| \\
&= \big|\int_A [f(x,y+h) - f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(h)]dx\big| \\
&= \big|\int_A [\frac{\partial f}{\partial y}(x,c_{x,y,h})(h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(h)]dx\big| \\
&\leq \int_A \|\frac{\partial f}{\partial y}(x,c_{x,y,h}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\|\,\|h\|dx \leq \int_A \frac{\varepsilon}{v(A)}\|h\|dx = \varepsilon\|h\|.
\end{aligned}$$

Esto prueba que para todo $y \in B$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\big|F(y+h) - F(y) - \int_A \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(h)dx\big| \leq \varepsilon\|h\|$$

si $\|h\| \leq \delta$, lo que significa que F es diferenciable en B, con

$$F'(y) = \int_A \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

para todo $y \in B$.

Una demostración alternativa de este resultado puede obtenerse generalizando la solución del problema 5.12 (es decir, combinando el teorema de Fubini con el Teorema Fundamental del Cálculo) para obtener que

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} = \int_A \frac{\partial f}{\partial y_j}(x,y)dx$$

para cada $j = 1, ..., m$, y después usar el Teorema 8.3 para probar que todas las derivadas parciales de F son continuas, de donde se sigue que F es de clase C^1. Se dejan como ejercicio al cuidado del lector los detalles de esta otra demostración.

Problemas

8.6 Sea (f_n) la sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x) = \frac{nx^3}{1 + n^8x^4}.$$

Estimar las normas uniformes $\|f_n\|_\infty$ de esta sucesión de funciones, y demostrar que la serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|$ es convergente. Concluir que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a una cierta función continua f. Después calcular $\int_{-1}^{1} f$ (obtener una expresión de esta integral como una serie de números reales).

8.7 Hallar el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \frac{n^2+1+y^5-x^4}{n^2} e^{-x^2-y^2}\, dxdy,$$

donde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$.

8.8 Si $a > 0$ demostrar que $\lim_n \int_a^{\pi} \frac{\sin nx}{nx}\, dx = 0$. ¿Qué sucede si $a = 0$?

8.9 Calcular $\lim_n \int_0^{\pi/4} x^n \sin \frac{1}{x}\, dx$.

8.10 Calcular $\lim_n \int_0^1 x^2 e^{-nx^2}\, dx$ y $\lim_n \int_{1/n}^1 x^2 e^{-nx^2}\, dx$.

8.11 Calcular la diferencial de la función $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 \operatorname{sen}(sxy) e^t ds dt.$$

8.12 Hacer lo mismo con la función $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y) = \int_0^x yte^t dt + \int_0^1 \operatorname{sen}(xyt) dt.$$

8.13 Calcular, para cada $t \in \mathbb{R}$, el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) e^{-x^2} dx.$$

Indicación: Considerar la función $F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) e^{-x^2} dx$ y derivarla usando el teorema de derivación bajo el signo integral; después desarrollar la expresión obtenida integrando por partes; finalmente resolver la ecuación diferencial así hallada. Recuérdese también que $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.