Capítulo 9

Integrales sobre caminos

Hasta ahora hemos estudiado integración de funciones sobre conjuntos (con volumen) de $\mathbb{R}^n$. En este y los próximos capítulos discutiremos la integración de funciones sobre caminos y superficies en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$, y las relaciones que pueden establecerse entre las diversas clases de integrales (por ejemplo, entre una integral sobre una superficie y otra sobre un camino cuando éste es el borde de aquélla, relación explicada por el teorema de Stokes). Estos tipos de integrales se utilizan con frecuencia en la física y de hecho su definición se hace más natural cuando se explicita alguna de las posibles interpretaciones físicas. Así, por ejemplo, la integral de linea (esto es, de un campo vectorial a lo largo de un camino) puede interpretarse como el trabajo realizado por una fuerza sobre una partícula que recorre dicho camino.

Comenzaremos este capítulo definiendo la longitud de un camino, y después estudiaremos las integrales de funciones escalares a lo largo de caminos (integrales de camino) y las integrales de funciones vectoriales a lo largo de caminos (integrales de linea). En este capítulo, como en todos los siguientes, $\|\cdot\|$ denotará la norma euclidea en $\mathbb{R}^n$.

Recordemos que un camino γ en $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua de un intervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ en A. Se dice en este caso que el camino γ une los puntos $p = \gamma(a)$ y $q = \gamma(b)$. Si $\gamma_1 : [a_1, b_1] \longrightarrow A$ y $\gamma_2 : [a_2, b_2] \longrightarrow A$ son dos caminos en A tales que $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ (es decir, γ_2 comienza donde γ_1 acaba), se define la concatenación $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ de γ_1 y γ_2 como el camino $\gamma : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \longrightarrow A$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a_1, b_1]; \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1) & \text{si } t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2]. \end{cases}$$

Más en general, si $\gamma_1, ..., \gamma_k$ son caminos en A, se puede definir su concatenación $\gamma_1 * ... * \gamma_k$ por inducción de manera evidente. A la imagen $\gamma([a,b])$ de un camino $\gamma : [a,b] \longrightarrow A$ se le llama *traza* de γ. Si $\gamma = \gamma_1 * ... * \gamma_k$ es una concatenación de varios caminos, es claro que la traza de γ es la unión de las trazas de todos los γ_i. Finalmente, si $\gamma : [a,b] \longrightarrow A$ es un camino en A entonces el *camino inverso* $\overline{\gamma} : [a,b] \longrightarrow A$ definido por

$$\overline{\gamma}(t) = \gamma(b + a - t)$$

tiene la misma traza que γ, sólo que la recorre en sentido inverso ($\overline{\gamma}$ une $\gamma(b)$ con $\gamma(a)$).

Definición 9.1 Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow A$ es un camino, se define la longitud de γ como

$$\ell(\gamma) = \sup\{\sum_{i=1}^{N} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| : a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b, N \in \mathbb{N}\};$$

cuando este supremo es finito se dice que γ es un camino rectificable, o simplemente que tiene longitud finita. Nótese que el supremo se toma respecto de todas las posibles particiones $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b\}$ de $[a,b]$. La longitud de γ es, pues, el supremo de las longitudes de todos los caminos poligonales que aproximan a γ.

A continuación enumeramos algunas propiedades elementales de la longitud de caminos.

Proposición 9.2 *Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow A$ es un camino, entonces*

(1) $\ell(\gamma) \geq \|\gamma(b) - \gamma(a)\|$ *(dicho de otra manera, la linea recta es el camino más corto entre dos puntos);*

(2) Si $\varphi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ *es una función biyectiva, entonces* $\ell(\gamma) = \ell(\gamma \circ \varphi)$*;*

(3) Si $\gamma = \gamma_1 * ... * \gamma_k$ *es concatenación de varios caminos, entonces*

$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma_1) + ... + \ell(\gamma_k);$$

(4) El camino inverso $\overline{\gamma}$ *satisface que* $\ell(\overline{\gamma}) = \ell(\gamma)$*;*

(5) Si γ *es Lipschitz entonces* $\ell(\gamma)$ *es finita; en particular, si* γ *es de clase* C^1 *en todo* $[a,b]$ *entonces tiene longitud finita.*

(6) Si γ tiene longitud finita l, entonces la función $\lambda : [a,b] \longrightarrow [0,l]$ definida por

$$\lambda(t) = \ell(\gamma_{|[a,t]}),$$

donde $\gamma_{|[a,t]}$ es la restricción de γ a $[a,t]$, es monótona creciente y continua.

La demostración de las propiedades (1) a (5) es sencilla y se deja al cuidado del lector. También es inmediato que la función λ de la propiedad (6) es creciente. Veamos cómo puede probarse que λ es continua en todo punto $t_0 \in [a,b]$. Basta demostrar que los límites laterales de λ en t_0 son ambos iguales a $\lambda(t_0)$. Veamos por ejemplo que $\lim_{t\to t_0^+} \lambda(t) = \lambda(t_0)$ (la demostración es totalmente análoga cuando se considera el límite por la izquierda). Puesto que, por la propiedad (3), es $\lambda(t) = \lambda(t_0) + \ell(\gamma_{|[t_0,t]})$, puede suponerse sin pérdida de generalidad que $t_0 = a$. Debemos probar, por tanto, que $\lim_{t\to a^+} \lambda(t) = 0 = \lambda(a)$. Como λ es creciente, de lo contrario tendríamos que

$$\lambda(t) \geq \varepsilon > 0 \text{ para todo } t > a,$$

donde $\varepsilon := \lim_{t\to a^+} \lambda(t)$. Al ser γ continuo en a, podemos encontrar $\delta_0 > 0$ tal que

$$\|\gamma(t) - \gamma(a)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

siempre que $t - a \leq \delta_0$. Por otro lado, como $\lambda(b) = \ell(\gamma)$ es finita, existe una partición $t_0 = a < t_1 < ... < t_N = b$ de $[a,b]$ tal que

$$\sum_{j=1}^{N} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \geq \lambda(b) - \frac{\varepsilon}{4} \qquad (*)$$

Evidentemente podemos suponer (añadiendo $a+\delta_0$ a esta partición de $[a,b]$ si fuera necesario) que $t_1 - t_0 \leq \delta_0$, y por tanto $\|\gamma(t_1) - \gamma(t_0)\| \leq \varepsilon/4$, lo que combinado con $(*)$ nos da

$$\sum_{j=2}^{N} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \geq \lambda(b) - \frac{\varepsilon}{2},$$

pero

$$\ell(\gamma_{|[t_1,b]}) \geq \sum_{j=2}^{N} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|,$$

luego

$$\ell(\gamma_{|[t_1,b]}) \geq \lambda(b) - \frac{\varepsilon}{2},$$

y así, usando la propiedad (3), obtenemos

$$\lambda(b) = \lambda(t_1) + \ell(\gamma_{|[t_1,b]}) \geq \varepsilon + \lambda(b) - \frac{\varepsilon}{2} = \lambda(b) + \frac{\varepsilon}{2},$$

luego $0 \geq \varepsilon$, lo que es absurdo. □

Es evidente que dos caminos diferentes pueden tener la misma traza. Por ejemplo, las curvas $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ y $\beta(t) = (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t))$, con $0 \leq t \leq 2\pi$, tienen la misma traza, a saber, la circunferencia unidad, pero mientras el primero la recorre solamente una vez, el segundo lo hace dos veces ya que viaja el doble de rápido. Por esta razón la longitud de β es también el doble que la de α. Sin embargo, cuando dos caminos con la misma traza son inyectivos, o cuando son inyectivos salvo en una cantidad finita de puntos, ambos tienen la misma longitud (ver el ejercicio 9.17); esto es una consecuencia directa de las propiedades (2) y (3) de la proposición anterior. Por lo tanto, la longitud de la traza de una curva es independiente de la parametrización de ésta, siempre que se trate de parametrizaciones inyectivas salvo quizás en una cantidad finita de puntos. Más adelante volveremos sobre el concepto de *reparametrización* de un camino. Ahora conviene detenernos para estudiar un modo más práctico de calcular la longitud de un camino que el de aplicar directamente la definición 9.1.

Cuando un camino es lo suficientemente regular, su longitud puede calcularse mediante una integral (quizás impropia, o incluso divergente). Un camino $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es de clase C^1 a trozos si su derivada existe y es continua salvo quizás en una cantidad finita de puntos de $[a, b]$. En lo que sigue, consideraremos casi exclusivamente caminos de clase C^1 a trozos, de modo que los lectores poco pacientes muy bien podrían tomar la fórmula (1) de la siguiente proposición como una definición y saltarse su demostración.

Proposición 9.3 *Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un camino de clase C^1 a trozos. Entonces*

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \tag{1}$$

Es conveniente observar que no todos los caminos continuos y C^1 a trozos tienen longitud finita (ver ejercicio 9.15); por tanto la integral $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ puede ser infinita. Lo que nos dice (1) es que $\ell(\gamma)$ es finita si y sólo si $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ lo es, y en este caso estas dos cantidades valen lo mismo.

Demostración:

Caso 1. Consideraremos primero el caso en que γ es de clase C^1 en todo el intervalo $[a, b]$. Como este intervalo es compacto, la derivada γ es uniformemente continua y acotada en $[a, b]$. En particular $t \mapsto \|\gamma'(t)\|$ es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b \|\gamma'(t)\|dt$ es finita. También sabemos que $\ell(\gamma)$ es finita, puesto que γ es Lipschitz. Por tanto en este caso sólo tenemos que probar que $\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt$. Veámoslo.

Como la derivada de γ es continua en el compacto $[a, b]$, sus funciones componentes $\gamma_1', ..., \gamma_n'$ son uniformemente continuas en $[a, b]$, lo que supone que la función

$$[a, b]^n \ni (s^1, ..., s^n) \mapsto \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j'(s^j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

es uniformemente continua en $[a, b]^n$, y por tanto, fijado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $s^j, s \in [a, b]$, $j = 1, ..., n$, y $|s^j - s| \leq \delta_1$ entonces

$$\left| \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j'(s^j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j'(s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)}. \tag{2}$$

Ahora, como $\|\gamma'\|$ es integrable sobre $[a, b]$, por el teorema de Darboux, existe $\delta_2 > 0$ tal que, si $P = \{t_0 = a < t_1 < ... < t_N = b\}$ es una partición de $[a, b]$ en intervalos de longitud menor o igual que δ_2 entonces

$$\left| \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt - \sum_{i=1}^{N} \|\gamma'(t_{i-1})\|(t_i - t_{i-1}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

Por otro lado, por definición de $\ell(\gamma)$, y teniendo en cuenta que esta longitud es finita, existe $P = \{t_0 = a < t_1 < ... < t_N = b\}$ partición de $[a, b]$ tal que

$$\left| \ell(\gamma) - \sum_{i=1}^{N} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

No hay inconveniente en suponer (añadiendo puntos si fuera necesario) que esta partición P tiene la propiedad de que $|t_i - t_{i-1}| \leq \delta$, donde $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$.

Por el teorema del valor medio aplicado a cada función componente $\gamma_j : [a, b] \to \mathbb{R}$ del camino γ en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, sabemos que existe $s_i^j \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$\gamma_j(t_i) - \gamma_j(t_{i-1}) = \gamma_j'(s_i^j)(t_i - t_{i-1}). \tag{5}$$

Usando (2) y (5) obtenemos que

$$\left|\sum_{i=1}^{N}\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|-\sum_{i=1}^{N}\|\gamma'(t_{i-1})\|(t_i-t_{i-1})\right|=$$

$$\left|\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{n}|\gamma_j'(s_i^j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}(t_i-t_{i-1})-\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{n}|\gamma_j'(t_{i-1})|^2\right)^{\frac{1}{2}}(t_i-t_{i-1})\right|\leq$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left|\left(\sum_{j=1}^{n}|\gamma_j'(s_i^j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\sum_{j=1}^{n}|\gamma_j'(t_{i-1})|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right|(t_i-t_{i-1})\leq$$

$$\frac{\varepsilon}{3(b-a)}\sum_{i=1}^{N}(t_i-t_{i-1})=\frac{\varepsilon}{3},$$

lo que combinado con (3) y (4) nos da

$$\left|\ell(\gamma)-\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt\right|\leq 3\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Como esto sirve para todo $\varepsilon>0$, deducimos que $\ell(\gamma)=\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt$.

Caso 2. Ahora consideraremos el caso en que γ es continua en $[a,b]$ y la derivada $\gamma'(t)$ existe y es continua en el intervalo abierto (a,b). En primer lugar veamos que $\ell(\gamma)$ es finita si y solo si la integral impropia $\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt$ converge. En efecto, supongamos que esta integral es finita. Como γ es continua, dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $a<t<s<b$, con $|t-a|\leq\delta$ y $|b-s|\leq\delta$, entonces

$$\|\gamma(t)-\gamma(a)\|\leq\varepsilon \qquad \text{y} \qquad \|\gamma(s)-\gamma(b)\|\leq\varepsilon,$$

y por tanto, para toda partición $P=\{a=t_0<t_1<...<t_N=b\}$ de $[a,b]$ en intervalos de longitud menor o igual que δ, se tendrá (aplicando el caso 1 a γ en $[t_1,t_{N-1}]$) que

$$\sum_{i=1}^{N}\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|\leq$$

$$\|\gamma(t_1)-\gamma(a)\|+\ell(\gamma_{|_{[t_1,t_{N-1}]}})+\|\gamma(b)-\gamma(t_{N-1})\|=$$

$$\|\gamma(t_1)-\gamma(a)\|+\int_{t_1}^{t_{N-1}}\|\gamma'(s)\|ds+\|\gamma(b)-\gamma(t_{N-1})\|\leq$$

$$2\varepsilon+\int_{t_1}^{t_{N-1}}\|\gamma'(s)\|ds\leq 2\varepsilon+\int_a^b\|\gamma'(s)\|ds,$$

y esto implica que $\ell(\gamma)$ es finita.

Por otro lado, si $\ell(\gamma)$ es finita, sabemos que, fijando $r \in (a,b)$, la función $\lambda : [r,b] \longrightarrow [0,l]$ definida por

$$\lambda(t) = \ell(\gamma_{|[r,t]}),$$

donde $\gamma_{|[r,t]}$ es la restricción de γ a $[r,t]$, es monótona creciente y continua. En particular,

$$\lim_{t \to b} \ell(\gamma_{|[r,t]}) = \ell(\gamma_{|[r,b]}),$$

y como, por lo anterior, es $\ell(\gamma_{|[r,t]}) = \int_r^t \|\gamma(s)\| ds$, se deduce que

$$\int_r^b \|\gamma'(s)\| ds = \lim_{t \to b} \int_r^t \|\gamma'(s)\| ds = \lim_{t \to b} \ell(\gamma_{|[r,t]}) = \ell(\gamma_{|[r,b]}).$$

Un razonamiento análogo prueba que

$$\int_a^r \|\gamma'(s)\| ds = \lim_{t \to a} \int_t^r \|\gamma'(s)\| ds = \ell(\gamma_{|[a,r]}).$$

Entonces

$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma_{|[a,r]}) + \ell(\gamma_{|[r,b]}) = \int_a^r \|\gamma'(s)\| ds + \int_r^b \|\gamma'(s)\| ds = \int_a^b \|\gamma'(s)\| ds.$$

Esto prueba (1) en el caso en que γ es continua en $[a,b]$ y la derivada $\gamma'(t)$ existe y es continua en el intervalo abierto (a,b).

Caso 3. Por último, consideremos el caso más general en que γ es continua y de clase C^1 a trozos. El camino γ puede expresarse entonces como concatenación de una cantidad finita de caminos γ_j cada uno de los cuales está en el caso anterior; es decir, $\gamma = \gamma_1 * ... * \gamma_k$, con $\gamma_j = \gamma_{|[t_{j-1},t_j]}$, para ciertos $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$, y cada γ_j es de clase C^1 en el intervalo abierto (t_{j-1}, t_j). Entonces, aplicando las propiedades de la longitud de caminos y lo ya demostrado, se tiene que

$$\ell(\gamma) = \sum_{j=1}^{k} \ell(\gamma_j) = \sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(s)\| ds = \int_a^b \|\gamma'(s)\| ds,$$

y así (1) queda probada en toda su generalidad. □

Retomemos ahora la cuestión de las diferentes parametrizaciones de un camino.

Definición 9.4 Sea $\alpha : [a,b] \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$ un camino C^1 a trozos, y sea $h : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ una biyección de clase C^1. Entonces, la composición

$$\beta = \alpha \circ h : [c,d] \longrightarrow A, \ \beta(t) = \alpha(h(t)),$$

se dice que es una reparametrización de α. Es claro que si β es reparametrización de α entonces ambos caminos tienen la misma traza e incluso la misma longitud (propiedad (2) de la proposición 9.2). Así, h no es más que un cambio de variable que modifica la rapidez con que se recorre el camino. En efecto, nótese que $\beta'(t) = \alpha'(h(t))h'(t)$, de modo que el vector velocidad de β se multiplica por el factor escalar $h'(t)$. Además, como h es una biyección C^1, h es o bien estrictamente creciente, o bien o estrictamente decreciente, y la derivada $h'(t)$ no cambia de signo; en el primer caso se tendrá $h(c) = a$ y $h(d) = b$, luego β recorre la traza de α en el mismo sentido que lo hace α (se dice entonces que la reparametrización β *conserva la orientación*); y en el segundo caso es $h(c) = b$ y $h(d) = a$, luego β recorre la traza de α en sentido opuesto al que lo hace α: comienza en $\alpha(b)$ y termina en $\alpha(a)$ (en este caso se dice que β *invierte la orientación*).

Cuando un camino $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es *regular* (es decir, es de clase C^1 y tiene la propiedad de que $\alpha'(t) \neq 0$ para todo t), siempre existe una reparametrización $\beta : [0,l] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de α que conserva la orientación y que tiene la agradable propiedad de que

$$\int_0^t \|\gamma'(s)\| ds = t$$

para todo $t \in [0,l]$, es decir, el parámetro t coincide con la longitud de la curva recorrida por β desde el instante $s = 0$ hasta el tiempo $s = t$. Se dice entonces que β está *parametrizado por la longitud de arco*. Esta condición equivale a decir que β recorre la traza de α con rapidez constante igual a 1:

$$\|\beta'(t)\| = 1$$

para todo $t \in [0,l]$. Ver el ejercicio 9.22. La reparametrización por la longitud de arco simplifica muchas veces las demostraciones y se utiliza sistemáticamente en geometría diferencial de curvas; ver por ejemplo la demostración de la desigualdad isoperimétrica en el capítulo sobre el teorema de Green.

A continuación daremos la definición de integral de una función escalar $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre un camino $\gamma : [a,b] \longrightarrow A$. Las interpretaciones físicas de este tipo de integral son variadas. Por ejemplo, supóngase que la traza de γ representa un alambre de densidad variable, y la función $f(x, y, z)$ denota la densidad de masa del alambre en el punto (x, y, z); entonces la integral $\int_\gamma f$ será la masa total del alambre.

Definición 9.5 Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar continua, y $\gamma : [a, b] \longrightarrow A$ un camino C^1 a trozos sobre su dominio. Se define la integral de f sobre γ por

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

cuando esta integral existe.

Nótese que si la longitud de γ es finita entonces la integral existe siempre. Por otra parte, cuando $f = 1$ la integral $\int_\gamma f ds$ es precisamente la longitud de γ.

Ejemplo 9.6 Sean $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la hélice $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, y $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Calcular la integral $\int_\gamma f(x, y, z) ds$.

Ejemplo 9.7 Hallar la masa de un alambre que sigue la circunferencia plana de radio 50 centímetros y centro el origen, y cuya densidad de masa en cada punto (x, y) de la circunferencia viene dada por la función $f(x, y) = x^2 + 2|y|$ gramos por centímetro de alambre.

Cuando $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva plana y $z = f(x, y) \geq 0$, puede interpretarse que $f(x, y)$ es la altura de una valla levantada sobre la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$; entonces la integral $\int_\gamma f(x, y) ds$ representa el área de dicha valla.

Ejemplo 9.8 Calcular el área de una valla de base una circunferencia de radio 10 metros y cuya altura en cada punto es un metro más que la décima parte de la distancia al cuadrado de dicho punto a un punto fijo situado sobre la circunferencia.

Pasamos ahora a definir la integral de un *campo vectorial* sobre un camino. A este tipo de integral se le llama *integral de linea*. La principal interpretación física de la integral de linea es la siguiente. Consideremos $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, un campo de fuerza en el espacio tridimensional y una partícula p (por ejemplo, una carga pequeña inmersa en un campo eléctrico, o una masa pequeña en un campo gravitatorio) que está sujeta a esta fuerza y se mueve a lo largo de un camino $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mientras F actúa sobre ella. Es deseable tener una fórmula para el trabajo realizado por el campo F

sobre la partícula p. Si γ fuera un trozo de linea recta equivalente a un vector d y F fuera constante sobre γ entonces las leyes elementales de la física nos dicen que el trabajo realizado por F al mover p sobre d es el producto escalar

$$\text{trabajo realizado por } F = F \cdot d,$$

es decir, el producto de la intensidad de la fuerza por el desplazamiento en la dirección de la fuerza. En el caso general en que la curva γ no es recta ni la fuerza F constante, puede pensarse que la curva se aproxima por una sucesión de segmentos infinitesimales sobre cada uno de los cuales la fuerza sí es constante, y que sumando los productos de $F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$, es decir, los trabajos realizados sobre cada uno de esos segmentos infinitesimales que contienen el punto $\gamma(t)$ y que tienen la dirección de la tangente a γ en ese punto, $\gamma'(t)$, podemos obtener la fuerza total realizada por F sobre p al moverla a lo largo de γ. Esto nos lleva a la siguiente fórmula:

$$\text{trabajo realizado por } F = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt,$$

que es precisamente la definición de integral de linea.

Definición 9.9 Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, un campo vectorial continuo sobre la imagen de un camino C^1 a trozos $\gamma : [a, b] \longrightarrow A$ con longitud finita. Se define la integral de linea de F sobre γ por la fórmula

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt,$$

donde $F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$ denota el producto escalar de $F(\gamma(t))$ con $\gamma'(t)$. Si $n = 3$ y $F = (F_1, F_2, F_3)$, donde las F_i son las funciones componentes de F, otro modo frecuente de denotar esta integral es

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_\gamma F_1dx + F_2dy + F_3dz = \int_a^b \big(F_1\frac{dx}{dt} + F_2\frac{dy}{dt} + F_3\frac{dz}{dt}\big)dt.$$

De la expresión $F_1dx + F_2dy + F_3dz$ se dice que es una *forma diferencial*; ver el último capítulo para una breve introducción a la teoría de formas diferenciales.

Ejemplo 9.10 Si $F(x, y, z) = (x, y, z)$ y γ es la hélice $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, calcular la integral de linea $\int_\gamma F \cdot ds$. Calcular también

$$\int_\sigma x^2dx + xydy + dz,$$

donde $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t, t^2, 1)$, con $0 \leq t \leq 1$.

A continuación veremos que las integrales a lo largo de un camino son invariantes respecto de reparametrizaciones de dicho camino.

Proposición 9.11 *Sean* $\alpha : [a,b] \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$ *un camino* C^1 *a trozos, y* $\beta : [c,d] \longrightarrow A$ *una reparametrización de* α*. Entonces, para todo campo escalar* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$*, es*

$$\int_\alpha f ds = \int_\beta f ds,$$

y para todo campo vectorial $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$*, se tiene que, o bien*

$$\int_\beta F \cdot ds = \int_\alpha F \cdot ds, \text{ si } \beta \text{ conserva la orientación,}$$

o bien

$$\int_\beta F \cdot ds = -\int_\alpha F \cdot ds, \text{ si } \beta \text{ invierte la orientación.}$$

Demostración: Por hipótesis, existe una biyección $h : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ de clase C^1 tal que $\beta = \alpha \circ h$, y por la regla de la cadena es

$$\beta'(t) = \alpha'(h(t))h'(t),$$

de modo que

$$\int_\beta F \cdot ds = \int_c^d [F(\alpha(h(t))) \cdot \alpha'(h(t))]h'(t).$$

Entonces, si h conserva la orientación, $|h'(t)| = h'(t)$ para todo t, y aplicando el teorema de cambio de variables $s = h(t)$, obtenemos que

$$\int_\alpha F \cdot ds = \int_a^b F(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) ds = \int_{h(c)}^{h(d)} = F(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) ds$$
$$= \int_c^d [F(\alpha(h(t))) \cdot \alpha'(h(t))]h'(t) dt = \int_\beta F \cdot ds.$$

Por otra parte, si h invierte la orientación entonces $|h'(t)| = -h'(t)$, y en este caso es

$$\int_\alpha F \cdot ds = \int_{h(d)}^{h(c)} F(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) ds = \int_c^d [F(\alpha(h(t))) \cdot \alpha'(h(t))]|h'(t)| dt$$
$$= -\int_c^d [F(\alpha(h(t))) \cdot \alpha'(h(t))]h'(t) dt = -\int_\beta F \cdot ds.$$

Por último, en el caso de integral de un campo escalar, tanto si h conserva la orientación como si la invierte, se tiene que

$$f(\beta(t))\|\beta'(t)\| = f(\alpha(h(t)))\|\alpha'(h(t))h'(t)\| = f(\alpha(h(t)))\|\alpha'(h(t))\||h'(t)|,$$

de donde, aplicando el teorema de cambio de variables, podemos concluir que

$$\int_\alpha f ds = \int_\beta f ds.$$

La proposición anterior es muy útil en la práctica, pues nos permite usar cualquier reparametrización de un camino para calcular una integral a lo largo de él.

Ejemplo 9.12 Calcular la integral de linea

$$\int_\gamma \cos xd + \sin y dy,$$

donde γ es un camino que recorre la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Para terminar este capítulo daremos una definición y algunas observaciones sobre las *curvas simples* y las *curvas cerradas simples*, una clase de curvas que son particularmente útiles, entre otras razones porque permiten escribir las integrales sobre sus trazas sin hacer referencia a una parametrización concreta, ya que dichas integrales son independientes de la parametrización elegida; de este modo se consigue expresar la teoría de integrales a lo largo de curvas simples de manera más intrínseca y más geométrica.

Definición 9.13 Se dice que $C \subset \mathbb{R}^n$ es una *curva simple* si C es la traza de un camino inyectivo, es decir, si existe un camino $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ inyectivo tal que $\gamma([a, b]) = C$. Es decir, una curva simple es la traza de un camino que no se corta a sí mismo. Los puntos $p = \gamma(a)$ y $q = \gamma(b)$ se llaman los extremos de la curva simple C. Nótese que estos extremos son los mismos para cualquier reparametrización α de γ, sólo puede cambiar el sentido en que se recorre C: o bien p es el punto inicial de α y q su punto final, o bien es al revés. Por tanto, toda curva simple con extremos p y q tiene dos posibles *orientaciones* o *direcciones*: C puede estar *dirigida* o bien de p a q, o bien de q a p. La curva C, junto con una de estas dos orientaciones se dice que es una *curva simple orientada*.

Por otra parte, se dice que $C \subset \mathbb{R}^n$ es una *curva cerrada simple* si existe un camino $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma([a,b]) = C$, $\gamma(a) = \gamma(b)$, y γ es inyectivo en el intervalo $[a,b)$. Si γ satisface la condición $\gamma(a) = \gamma(b)$, pero no es necesariamente inyectivo en $[a,b)$, se dice solamente que $C = \gamma([a,b])$ es una *curva cerrada*. Como en el caso anterior, hay dos posibles orientaciones para una curva cerrada simple, dependiendo del sentido en que ésta se recorre. La curva C, junto con una de estas dos orientaciones se dice que es una *curva cerrada simple orientada*.

A propósito de curvas cerradas simples no debemos dejar de recordar el siguiente resultado fundamental, conocido como *teorema de la curva de Jordan*.

Teorema 9.14 (de la curva de Jordan) *Sea C una curva cerrada simple en el plano $\mathbb{R}^2$. Entonces $\mathbb{R}^2 \setminus C$ tiene exactamente dos componentes conexas, una acotada y homeomorfa al interior del círculo unidad, y otra no acotada (homeomorfa al exterior del círculo unidad).*

La demostración de este teorema, bastante más difícil de lo que su inocente enunciado permite suponer, suele hacerse en los cursos de topología algebraica o de geometría diferencial.

Si $C \subset A \subseteq \mathbb{R}^n$ es una curva simple orientada o una curva cerrada simple orientada, y $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campos vectorial, puede definirse sin lugar a ambigüedades la integral de linea de F a lo largo de C, $\int_C F \cdot ds$; basta elegir cualquier parametrización γ de C que conserve su orientación, y poner

$$\int_C F \cdot ds = \int_\gamma F \cdot ds;$$

la proposición 9.11 nos garantiza que $\int_\gamma F \cdot ds$ vale lo mismo para cualquier parametrización γ de C que conserve su orientación. Análogamente, si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar, se define

$$\int_C f ds = \int_\gamma f ds,$$

donde γ es cualquier parametrización de C que conserve su orientación.

Debe notarse que en todo lo anterior es fundamental el hecho de que las curvas son simples (es decir, inyectivas salvo quizás en un punto a lo sumo). Es posible que dos caminos γ y σ tengan como imagen la misma curva e induzcan la misma orientación sobre ella, y sin embargo $\int_\gamma F \cdot ds \neq \int_\sigma F \cdot ds$; por ejemplo, esto sucede para $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ y $\sigma(t) = (\cos 2t, \sin 2t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, con $F(x,y,z) = (y,0,0)$. Claramente γ y σ tienen la misma imagen, a saber la circunferencia unidad C, que es una curva cerrada simple, y la recorren en el mismo sentido, pero mientras que γ lo hace solo una vez y por tanto es una parametrización de la curva cerrada simple C, σ la recorre dos veces; en particular σ no es inyectiva y no vale como parametrización de la curva cerrada simple C.

Si C es una curva simple orientada, o una curva cerrada simple orientada, denotaremos por C^- la misma curva, pero con la orientación opuesta. Por otra parte, si C está compuesta de varias curvas simples (posiblemente cerradas) orientadas $C_1, ..., C_k$, recorridas de forma sucesiva, tales que el punto final de cada una de ellas es el inicial de la siguiente, denotaremos $C = C_1 + ... + C_k$. Esto equivale a decir que $\gamma = \gamma_1 * ... * \gamma_k$, donde cada γ_i es una parametrización de C_i, y γ es una parametrización de C. De hecho, dados varias curvas (quizás cerradas) simples orientadas C_1, ..., C_k, podemos incluso eliminar la restricción de que el punto inicial de C_i sea el inicial de C_{i+1}, y definir formalmente la *suma de curvas*

$$C = C_1 + ... + C_k,$$

e incluso también la *diferencia de curvas* como la suma de una con la otra orientada al revés, es decir

$$C_1 - C_2 = C_1 + C_2^-.$$

De este modo, el conjunto de todas las sumas finitas formales de curvas (posiblemente cerradas) simples orientadas de clase C^1 incluidas en un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ genera un grupo, cuyo elemento neutro denotaremos 0. Si $C = C_1 + ... + C_k$ es un elemento de este grupo y $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo, se define

$$\int_C F \cdot ds = \int_{C_1} F \cdot ds + \int_{C_2} F \cdot ds + ... + \int_{C_k} F \cdot ds,$$

bien entendido que $\int_0 F \cdot ds = 0$, y así se tiene también que

$$\int_{C_1 + C_2^-} F \cdot ds = \int_{C_1} F \cdot ds - \int_{C_2} F \cdot ds.$$

Estas definición es coherente con las propiedades de la concatenación de caminos y de las integrales a lo largo de caminos: si γ es un camino C^1 a trozos que es concatenación de caminos de clase C^1 a trozos contenidos en $A \subseteq \mathbb{R}^n$, digamos $\gamma = \gamma_1 * ... * \gamma_k$, entonces

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_{\gamma_1} F \cdot ds + \int_{\gamma_2} F \cdot ds + ... + \int_{\gamma_k} F \cdot ds,$$

para todo campo vectorial $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (ver ejercicios 9.29 y 9.30).

Una de las razones para escribir una curva C como suma de componentes curvas C_i es la de que a menudo resulta más fácil parametrizar dichas componentes una por una que parametrizar C directamente. Por ejemplo, si C es el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$ en $\mathbb{R}^2$, orientado según el orden de dichos vértices, para calcular $\int_C F \cdot ds$ es más fácil evaluar $\int_{C_i} F \cdot ds$, donde C_i es cada segmento del cuadrado, y después sumar estas cuatro integrales de linea.

Problemas

9.15 Sea $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el camino definido por $\gamma(t) = (t, t \,\mathrm{sen}\,(1/t))$ si $t > 0$, y $\gamma(0) = (0,0)$. Probar que γ es continuo y de clase C^1 a trozos en $[0,1]$ y de hecho es diferenciable de clase C^∞ en $(0,1]$, pero su longitud es infinita.

9.16 Hacer un dibujo de la traza de los siguientes caminos, y calcular su longitud:

(a) $\gamma(t) = (R\cos 2t, R\sin 2t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

(b) $\gamma(t) = (R\cos t, -R\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(c) $\gamma(t) = (R\cos t^2, R\sin t^2)$, $0 \leq t \leq \sqrt{2\pi}$.

(d) $\gamma(t) = (t^4, t^4)$, $-1 \leq t \leq 1$.

(e) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 4\pi$.

(f) $\gamma(t) = (R\cos 2t, R\sin 2t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

(g) $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$, $0 \leq t < \infty$ (espiral logarítmica).

(h) $\gamma(t) = (t^3, t^2)$, $-2 \leq t \leq 2$.

(i) $\gamma(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$, $-4 \leq t \leq 4$.

9.17 Sean α y β dos caminos que tienen la misma traza. Supongamos que ambos son inyectivos excepto en una cantidad finita de puntos. Probar que α y β tienen la misma longitud. *Indicación:* Suponer primero que tanto α como β son inyectivos en todo su dominio, y deducir el resultado de la propiedad (2) de la proposición 9.3. Para probar el caso más general, expresar α y β como concatenación de caminos inyectivos y aplicar lo anterior.

9.18 Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 a trozos. Probar que la longitud de la gráfica de f sobre $[a,b]$ es

$$\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

9.19 Definamos $\alpha : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\alpha(t) = \begin{cases} (-e^{-1/t^2}, e^{-1/t^2}) \quad \text{si } t<0; \\ (0,0) \quad \text{si } t=0; \\ (e^{-1/t^2}, e^{-1/t^2}) \quad \text{si } t>0, \end{cases}$$

y sea $\beta : [-e^{-1}, e^{-1}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\beta = (t, |t|)$. Probar que α y β tienen la misma traza (a saber, un trozo de la gráfica de la función valor absoluto); sin embargo α es de clase C^∞ en todo su dominio, mientras que β no es diferenciable en el origen. No obstante, obsérvese que $\alpha'(0)=0$; es decir, α debe detenerse en $t=0$ para poder ser diferenciable en ese punto. Generalizar este hecho: probar que si $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ es un camino diferenciable y su traza coincide con la gráfica de una función f cuyas derivadas laterales (no necesariamente finitas) son diferentes en un punto x_0 (y en particular la función no es derivable en ese punto), entonces $\alpha'(t)=0$ para todos los t tales que $x(t)=x_0$. Por otra parte, si sólo se supone que f no es derivable en x_0, probar que al menos se tiene $x'(t)=0$ para todo t con $x(t)=x_0$.

9.20 Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un camino C^1 tal que $\gamma'(t) \neq 0$ para todo t. Probar que $\|\gamma(t)\|$ es una constante no nula si y sólo si el vector velocidad $\gamma'(t)$ es ortogonal al vector posición $\gamma(t)$ para todo t.

9.21 Un camino α de clase C^2 tiene la propiedad de que su segunda derivada $\alpha''(t)$ es idénticamente cero. ¿Qué puede decirse sobre α?

9.22 *Reparametrización de curvas por la longitud de arco.*
Un camino $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es *regular* si es de clase C^1 y tiene

la propiedad de que$\gamma'(t) \neq 0$ para todo t. Se dice que un camino regular γ está *parametrizada por la longitud de arco* si

$$\int_a^t \|\gamma'(s)\| ds = t - a$$

para todo $t \in [a, b]$, es decir, el parámetro $t - a$ coincide con la longitud de la curva recorrida por γ desde el instante $s = a$ hasta el tiempo $s = t$. Comprobar que γ está parametrizado por la longitud de arco si y sólo si

$$\|\gamma'(t)\| = 1$$

para todo $t \in [a, b]$, es decir, el vector velocidad del camino tiene longitud constante e igual a 1. Después, demostrar que todo camino regular puede reparametrizarse por la longitud de arco. Es decir, si $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un camino regular, existe otro camino $\beta : [0, l] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ parametrizado por la longitud de arco tal que α y β tienen la misma traza y la misma longitud. *Indicación:* Defínase

$$u = u(t) = \int_a^t \|\alpha'(s)\| ds;$$

entonces, como $u'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ para todo t, la función $u = u(t)$ tiene una inversa diferenciable $u^{-1} : [0, l] \longrightarrow [a, b]$. Póngase entonces $\beta = \alpha \circ u^{-1}$, y compruébese que β y α tienen la misma traza, y $\|\beta'(s)\| = 1$ para todo s.

9.23 Sea γ una curva en el plano cuya expresión en coordenadas polares viene dada por $\rho = \rho(\theta)$, con $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Demostrar que su longitud es

$$\ell(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta.$$

9.24 Calcular la longitud de la cardioide $\rho = a(1 + \cos\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

9.25 En los siguientes casos, calcular la integral de f a lo largo de γ:

(a) $f(x, y) = 1 + y$; $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $0 \leq t \leq 3\pi/2$.

(b) $f(x, y, z) = xyz$; $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 3)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(c) $f(x, y, z) = x + y + z$; $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

9.26 En los siguientes casos, calcular la integral del campo F a lo largo de la curva γ:

(a) $F(x,y) = (-x^2y, xy^2)$; $\gamma(t) = (\sin t, \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(b) $F(x,y,z) = (x,y,z)$; $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(c) $f(x,y,z) = (y^2, x^2)$; $\gamma \equiv \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, y \geq 0\}$, recorrida en sentido positivo.

9.27 Calcular:

(a) $\int_\gamma ydx - xdy$; $\quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(b) $\int_\gamma x^2dx + xydy$; $\quad \gamma$ es el cuadrado de vértices $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$, en sentido positivo.

(c) $\int_\gamma \sin zdx + \cos zdy - (xy)^{1/3}dz$; $\quad \gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, t)$, $0 \leq t \leq 7\pi/2$.

(d) $\int_\gamma ydx + (3y^2 - x)dy + zdz$; $\quad \gamma(t) = (t, t^n, 0)$, $0 \leq t \leq 1$; siendo $n \in \mathbb{N}$.

(e) $\int_\gamma 2xydx + (x^2 + z)dy + ydz$; $\quad \gamma$ es el segmento de $(1,0,2)$ a $(3,4,1)$.

(f) $\int_\gamma xydx + yzdy + xzdz$; $\quad \gamma \equiv \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, z = x, y \geq 0\}$.

9.28 Consideramos la fuerza $F(x,y,z) = (x,y,z)$. Calcular el trabajo realizado al mover una particula sobre la parábola $y = x^2, z = 0$, desde $x = 1$ hasta $x = 2$.

9.29 Probar que si γ es un camino C^1 a trozos que es concatenación de caminos de clase C^1 a trozos contenidos en $A \subseteq \mathbb{R}^n$, digamos $\gamma = \gamma_1 * ... * \gamma_k$, entonces

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_{\gamma_1} F \cdot ds + \int_{\gamma_2} F \cdot ds + ... + \int_{\gamma_k} F \cdot ds,$$

y

$$\int_\gamma fds = \int_{\gamma_1} fds + \int_{\gamma_2} fds + ... + \int_{\gamma_k} fds,$$

para todo campo vectorial $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y todo campo escalar $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

9.30 Recordemos que si $\gamma : [a,b] \longrightarrow A$ es un camino en $A \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces el *camino inverso* $\overline{\gamma} : [a,b] \longrightarrow A$ se define por

$$\overline{\gamma}(t) = \gamma(b + a - t).$$

Probar que para todo campo vectorial $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\int_{\overline{\gamma}} F \cdot ds = -\int_{\gamma} F \cdot ds,$$

mientras que si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar entonces es

$$\int_{\overline{\gamma}} f ds = \int_{\gamma} f ds.$$