CÁLCULO DIFERENCIAL. HOJA DE PROBLEMAS 3.

SUCESIONES, COMPLETITUD Y COMPACIDAD.

1. Estudiar la convergencia de las sucesiones (x_n) de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ definidas por las siguientes expresiones, calculando el límite de las mismas cuando exista. Si no existe, estudiar si alguna subsucesión suya converge.

i) $x_n = (e^{3+5n-n^2}, \operatorname{arctg} n)$ en $\mathbb{R}^2$;
ii) $x_n = (e^{3+5n-n^2}, n^2)$ en $\mathbb{R}^2$;
iii) $x_n = (\sin(n^2+7), 1/n^3)$ en $\mathbb{R}^2$;
iv) $x_n = (\sin^{3n}(n^2+\sqrt{2}), (-1)^n, e^{-5n})$ en $\mathbb{R}^3$.

2. Sea (x_n) una sucesión de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\|x_n - x_k\| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{k}$$

para todo $n, k \in \mathbb{N}$. Probar que (x_n) es convergente.

3. Sea (x_n) una sucesión de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{1}{n^2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que (x_n) es convergente.

4. Definir cuándo una serie de vectores de $\mathbb{R}^n$ es convergente.

5. Diremos que una serie de vectores $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ de $\mathbb{R}^n$ es *absolutamente convergente* si la serie de números reales $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ es convergente en $\mathbb{R}$. Probar que toda serie absolutamente convergente es convergente en $\mathbb{R}^n$.

6. Sea (x_n) una sucesión en un espacio métrico X. Para cada $m \in \mathbb{N}$ definamos $Q_m = \{x_n : n \geq m\}$. Probar que (x_n) es de Cauchy si y sólo si $\lim_{m\to\infty} \operatorname{diam}(Q_m) = 0$.

7. Mostrar con un ejemplo que el teorema de Cantor no es cierto si $\operatorname{diam}(C_n)$ no converge a 0 o si X no es compacto.

8. Si $x_n \to x$ en un espacio normado X, demostrar que $\|x_n\| \to \|x\|$.

9. Más en general, demostrar que si $x_n \to x$ entonces $d(x_n, z) \to d(x, z)$.

10. Demostrar que el espacio $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ es completo.

11. Poner un ejemplo de una aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaga $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y que no tenga ningún punto fijo. Así, el Teorema del punto fijo no es cierto para aplicaciones L-Lipschitz con $L \geq 1$.

12. Utilizando el teorema del punto fijo para aplicaciones contractivas, demostrar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}\sin(x+y) + \frac{1}{3}, \\ y = -\frac{1}{4}\sin(x-y) + \frac{1}{5} \end{cases}$$

tiene solución única para $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$.

13. Demostrar que la esfera de $\mathbb{R}^n$ (para cualquier norma) es un compacto.

14. Demostrar que existe una sucesión (n_k) de números naturales tales que existen los límites $\lim_{k\to\infty} \cos(n_k)$, $\lim_{k\to\infty} \sin(n_k^2)$ y $\lim_{k\to\infty} \cos(n_k^3)$.

15. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son compactos.

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^6 \leq 5\}$
$C = \{(x,y)\} \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}, x^4 + y^6 \leq 5\}$
$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2\}$
$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 + z^6 \leq 3\}$.

16. Si (x_n) es una sucesión que converge a x en un espacio métrico X, demostrar que el conjunto $K := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto.

17 (Conjunto de Cantor)**.** Sean $F_1 = [0,1]$, $F_2 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$, $F_3 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$, y en general sea F_{n+1} el cerrado que se obtiene al quitar de cada uno de los intervalos que componen F_n el tercio medio. Definamos $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, el conjunto de Cantor. Demostrar que:

a) C es compacto y no vacío;
b) C tiene interior vacío;
c) C no tiene puntos aislados;
d) C es infinito no numerable.

18. Probar que todo subconjunto finito de un espacio métrico es compacto.

19. Probar que la frontera de un conjunto acotado en $\mathbb{R}^n$ es siempre compacta.

20. Probar que si K es un compacto de X entonces K tiene a lo sumo una cantidad finita de puntos aislados.

21. * Sea X un espacio métrico, $A \subset X$ y $\alpha \in A$ un punto con la propiedad siguiente:

> Para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X convergente hacia α y para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ si $n \geq n_\varepsilon$.

Demostrar que $\alpha \in \operatorname{int}(A)$.

22. * Sea A un subconjunto de un espacio métrico X. Demostrar que A está totalmente acotado si y sólo si toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A admite una subsucesión de Cauchy.