CÁLCULO DIFERENCIAL. HOJA DE PROBLEMAS 4.

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES.

1. Determinar si los siguientes límites existen o no, y en caso afirmativo hallar su valor:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}}{x+1}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2},$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{x}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2},$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x}\sin(xy),$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\sqrt{y}\log(x^2+y^2), \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x}\sin(x^2+y^2).$$

2 (Teorema del bocadillo)**.** Demostrar que si $f, g, h : A \subseteq X \to \mathbb{R}$ son funciones tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in A$ y existen $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$, entonces también existe $\lim_{x\to a} g(x)$, y además $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$.

3. Sean $f, g : A \subseteq X \to Y$ tales que $f(x) = g(x)$ para todo x de un entorno U de $a \in A'$. Supongamos que existe $\lim_{x\to a} g(x)$. Demostrar que entonces también existe $\lim_{x\to a} f(x)$, y $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$. Deducir que la continuidad de una función f en un punto a también es una propiedad local.

4. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{t\to\infty} g(t) = L$, probar que $\lim_{x\to a} g(f(x)) = L$.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Demostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$ si y solo si $\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = L$ uniformemente en θ; es decir, si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \rho < \delta$ entonces $|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - L| \leq \varepsilon$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$.

6. Aplicando el ejercicio anterior, probar que si $|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| \leq F(\rho)G(\theta)$, donde $\lim_{\rho\to 0} F(\rho) = 0$ y G es una función acotada, entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Supongamos que existen los límites

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y), \quad \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right), \ y \ \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right):$$

Probar que entonces los tres límites son iguales.

8. Sea B una bola de centro a en un espacio vectorial normado E, y sea $f : B \to Y$, donde Y es un espacio métrico. Demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ si y solo si para cada curva continua $\gamma : [0,1] \to B$ tal que $\gamma(0) = a$ se tiene que $\lim_{t\to 0^+} f(\gamma(t)) = b$.

9. Estudiar la existencia (y calcular en su caso) los límites siguientes:

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{\cos(x+y)}{e^x+e^y}, \quad \lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x+y}{e^{x^2+y^2}}$$
$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{(3-x^2)\cos(y-x^3)}{x^2+y^4}, \quad \lim_{(x,y)\to\infty} \frac{(y-x^2)\log(1+x^2+y^2)}{1+\sin^2 x}.$$

10. Probar que si $f, g : X \to Y$ son continuas y existe un subconjunto D denso en X tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$, entonces $f = g$.

11. Poner un ejemplo de una función continua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tales que $f(U)$ no es abierto. Encontrar también $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continua y $C \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que C es cerrado pero $f(C)$ no lo es.

12. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua en x_0 con $f(x_0) > 0$. Probar que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in B(x_0, r)$.

13. Probar que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua y $B \subset \mathbb{R}^n$ es acotado entonces $f(B)$ es acotado en $\mathbb{R}^m$. Observar que esto es cierto gracias a que el dominio de la función es todo $\mathbb{R}^n$, pero no es cierto en general si sustituimos $\mathbb{R}^n$ por un subconjunto abierto suyo.

14. Dar un ejemplo de función continua definida sobre un conjunto de $\mathbb{R}^n$ que no alcance ni máximo ni mínimo. Más en general, demostrar que si A es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que tiene la propiedad de que *toda* función continua $f : A \to \mathbb{R}$ alcanza un máximo absoluto en A, entonces A es compacto.

15. Probar que no existe ninguna aplicación continua y sobreyectiva de $[0, 1]$ en $(0, 1)$.

16. Probar que si $f, g : X \to \mathbb{R}^m$ son Lipschitz entonces $f + g$ también es Lipschitz. Demostrar también que si $F : X \to Y$, $G : Y \to Z$ son Lipschitz entonces $G \circ F : X \to Z$ también es Lipschitz. Estimar las constantes de Lipschitz de $f + g$ y de $G \circ F$ en función de las de f, g, F y G.

17. Probar que si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son Lipschitz y acotadas en X entonces su producto $fg : X \to \mathbb{R}$ también es Lipschitz en X.

18. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son homeomorfos entre sí $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b), $\mathbb{R}$, $[a, b]$, $[0, 1]$.

19. En los siguientes casos, estudiar si $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo sobre su imagen:

1. $f(t) = (t^2 - t, t^2 + 2t)$;
2. $f(t) = \left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}\right)$.

20. Sean $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\big(x + y, x - y\big).$$

Determinar $f(A)$, y estudiar si $f_{|A} : A \to f(A)$ es un homeomorfismo.

21. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. Demostrar que entonces su gráfica $G_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ es un conjunto cerrado en $X \times Y$.

22. Demostrar que $f : X \to Y$ es continua si y sólo si para todo $A \subseteq X$ se tiene que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

23. Demostrar que $\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$.

24. Demostrar que si A es cerrado y K es compacto en X tales que $K \cap A = \emptyset$, entonces

$$d(K, A) = \text{ínf}\{d(x, a) : x \in K, a \in A\} > 0,$$

y éste ínfimo se alcanza, es decir existe $x_0 \in K$ tal que $0 < d(x_0, A) \leq d(x, A)$ para todo $x \in K$. En particular se obtiene que, si A es un cerrado y B es un compacto de X, entonces $d(A, B) = 0 \iff A \cap B \neq \emptyset$. Dar un ejemplo que pruebe que esto no es cierto en general si uno de los dos conjuntos no es compacto

25. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua tal que existe $\text{lím}_{x\to\infty} f(x)$ y es finito. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

26. Estudiar si las funciones siguientes son uniformemente continuas o no en los dominios indicados.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t \sin t$;
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xe^y + e^{-y}$;
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = \big(1/(1 + t^2), t/(1 + t^4)\big)$;
4. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2}$.

27. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y acotada. ¿Es f necesiariamente uniformemente continua?

28. Probar que la suma y la composición de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua. Probar también que el producto de dos funciones uniformemente continuas *y acotadas* es uniformemente continuo.

29. Demostrar que $f : X \to \mathbb{R}^m$ es continua (respectivamente uniformemente continua) si y sólo si las funciones coordenadas $f_j : X \to \mathbb{R}$ son continuas (resp. uniformemente continuas) para todo $j = 1, ..., m$.

30. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to Y$ una función uniformemente continua, donde Y es un espacio métrico completo. Probar que f está acotada sobre cada subconjunto acotado de A.

31. En los siguientes casos estudiar la compacidad de A y de $\overline{f(A)}$, así como la continuidad uniforme de f en A.

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2 \leq 4x - y^2\}$, $f(x, y) = \big(\frac{x^2y}{x^2+y^2}, \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\big)$;
2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2y, y > 0\}$, $f(x, y) = \big(\frac{y^2}{x^2+y^2}, \frac{xy}{x^2+y^2}\big)$;
3. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < r\}$, y $f(x, y) = \frac{\cos(x^2+y^2)-1}{\sin(x^2+y^2)}$, donde $r \in \{1, \pi\}$ (dos casos).

32. Estudiar la continuidad uniforme de las aplicaciones $f, g : A \to \mathbb{R}$, donde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y|(1 + x^2) \leq x\}$, y $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = |x|^{1/2}y$.

33. Probar que la función determinante $\det : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ es continua.