CÁLCULO DIFERENCIAL. HOJA DE PROBLEMAS 7.

FUNCIONES DIFERENCIABLES. TEOREMA DEL VALOR MEDIO.

1. Sean $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $x = h_1(\rho, \theta) = \rho \cos\theta$, $y = h_2(\rho, \theta) = \rho \sin\theta$, es decir el cambio a coordenadas polares. Demostrar que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, y calcular su matriz jacobiana. Sea ahora $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable cualquiera. Aplicar la regla de la cadena para calcular la matriz jacobiana de $f \circ h$. Con la notación clásica, comprobar que

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = -\rho \sin\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \rho \cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}.$$

2. Sea $f(x, y, z) = \frac{x^2 - z^2}{x^2+y^2+z^2} \sin(x - y)$ si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. ¿Qué valor habría que dar a $f(0, 0, 0)$, para que f fuese continua en todo $\mathbb{R}^3$? ¿Es en este caso f diferenciable?, ¿y de clase C^1?

3. Calcúlese la diferencial en el punto $(0, 0, 0)$ de la función: $f(x, y, z) = \int_z^{xy^2} (t^2 + 1)e^{-t} dt$.

4. Sea $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable con $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sea $p \in \mathbb{R}^n$ un punto que no pertenezca a $\gamma(\mathbb{R})$. Supongamos que existe $q = \gamma(t_0)$ el punto de la curva más cercano a p. Demuéstrese que el vector $p - q$ es ortogonal a la curva en q.

5. Estúdiese la diferenciabilidad en el origen de las funciones del problema 1 de la hoja 4.

6. Sean n un número natural y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y)^n \cos \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

¿Cómo hay que elegir n para que: a) f sea continua?; b) f sea diferenciable?; c) f tenga derivadas parciales continuas?

7. Sean $g(t) = (t, 2t)$ y

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Pruébese que f admite derivadas parciales en $(0, 0)$ y calcúlense.
2. Pruébese que $f \circ g$ es diferenciable.
3. Compruébese que $(f \circ g)'(0) \neq < \nabla f(0, 0), g'(0) >$. ¿Por qué?. ¿Contradice esto la regla de la cadena?

8. Sean

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{x+y} + \int_0^x \frac{t^2}{(1 + t^4)^{1/2}} \, dt$$

1. Pruébese que $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ es diferenciable en $(0, 0)$ y $(0, r)$.
2. Dedúzcase que $G = F \circ F$ es diferenciable en $(0, 0)$ y calcúlese $DG(0, 0)$.

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Demuéstrese que f no es diferenciable en (0,0).
2. Demuéstrese que, si $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es diferenciable, entonces $h = f \circ g$ es diferenciable.

10 (Teorema de Euler)**.** Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y homogenea de grado m, es decir $f(tx) = t^m f(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Pruébese que $mf(x) = Df(x)(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

11. En los siguientes casos, estúdiese si la función es diferenciable y si es de clase C^1:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin^2 y}{x^2+2y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^2y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

12. Descríbanse las curvas de nivel de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, y $f(0,0) = 0$

13. Si $F(x,y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ representa la altura de una montaña en el punto (x,y) de un mapa, ¿en qué dirección desde $(0,1)$ deberá comenzar uno a caminar para escalar más rápidamente?

14. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 2y^2 - x(x-1)^2$.

1. Dibújense sus curvas de nivel, es decir los conjuntos $f^{-1}(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. (Indicación: Dibújense primero las curvas correspondientes a los niveles $\alpha = 0$ y $\alpha = 1/3$ y a continuación represéntense las correspondientes a $\alpha > 0$ y $\alpha < 0$).
2. Calcúlese el gradiente de f, $\nabla f(x,y)$. ¿En qué puntos es 0? Calcúlense $\nabla f(0,0)$, $\nabla f(\frac{4}{3},0)$, $\nabla f(2,1)$, $\nabla f(2,-1)$ y $\nabla f(\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{2}{27}})$. Obsérvese que estos vectores son perpendiculares a las correspondientes curvas de nivel.
3. Hágase un esbozo de la gráfica de f.

15. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa. Supongamos que existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $Df(x_0) = 0$. Probar que entonces f tiene un mínimo absoluto en x_0, es decir, $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

16. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (t^2, t^3)$. Comprobar que no existe ningún $c \in [0,1]$ tal que $f(1) - f(0) = Df(c)(1-0)$.

17. Probar que las únicas funciones diferenciables de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ cuya derivada es constante son las funciones afines.

18. Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continua, derivable en $(0,\infty)$, y tal que $f(0) = 0$ y f' es creciente. Probar que $g(x) = f(x)/x$ es creciente en $(0,\infty)$.

19. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable, donde U es un abierto convexo. Supongamos que la matriz jacobiana de f es definida positiva en U, es decir,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) h_i h_j > 0$$

para todos $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Demostrar que f es inyectiva. *Indicación:* Si $a, b \in U$ y $a \neq b$, poner $h = b - a$ y aplicar el teorema del valor medio a $g(x) = \langle f(x) - f(a), h \rangle$.

20. Sea U un subconjunto convexo y abierto en $\mathbb{R}^2$, y sea $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciable en U. Supongamos que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in C$. Probar que f no depende de y, es decir, $f(x,y_1) = f(x,y_2)$ para todos $(x,y_1), (x,y_2) \in U$. Generalizar el resultado para funciones definidas en abiertos convexos de $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 3$. ¿Es cierto esto si se supone solamente que U es conexo?