CÁLCULO INTEGRAL. HOJA 1.

MEDIDA EXTERIOR DE LEBESGUE. CONJUNTOS MEDIBLES EN $\mathbb{R}^N$. MEDIDA DE LEBESGUE.

Si $Q = (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)$ es un rectángulo abierto de $\mathbb{R}^n$, definimos el volumen de Q como el producto de las longitudes de sus lados, es decir

$$v(Q) = \Pi_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Definimos también el volumen de un rectángulo cerrado como el volumen de su interior.

1. Para cada subconjunto A de $\mathbb{R}^n$, definimos la medida exterior de A como

$$m_e(A) = \text{ínf}\{\sum_j v(Q_j) \ : \ (Q_j) \text{ sucesión de rectángulos abiertos en } \mathbb{R}^n \text{ tales que } A \subseteq \bigcup Q_j\}.$$

2. Probar que en la definición anterior lo mismo da considerar rectángulos abiertos que cerrados.

Indicación: para cada rectángulo cerrado Q_j existe un rectángulo abierto $R_j \supset Q_j$ tal que $v(R_j) \leq v(Q_j) + \varepsilon/2^j$.

3. Proposición. Demostrar lo siguiente:

a) $A \subset B \implies m_e(A) \leq m_e(B)$

b) $m_e(\emptyset) = 0$

c) **(Subaditividad)** Para toda sucesión (A_i) de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ se tiene

$$m_e(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i m_e(A_i).$$

4. Probar que para cada rectángulo Q se tiene $m_e(Q) = v(Q)$.

5. Probar que $m_e(A) = m_e(x + A)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, y que $m_e(rA) = r^n m_e(A)$ si $r > 0$.

6. Definición. Se dice que un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ tiene *medida cero* si $m_e(A) = 0$. Es decir, si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de rectángulos (Q_j) tales que $A \subseteq \bigcup Q_j$ y $\sum_j v(Q_j) \leq \varepsilon$.

7. Probar que:

a) la unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero;

b) cualquier subconjunto numerable de $\mathbb{R}^n$ tiene medida cero;

c) si $A \subseteq B$ y B tiene medida cero, entonces A también tiene medida cero;

d) todo hiperplano en $\mathbb{R}^n$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$.

8. Probar que cualquier circunferencia de $\mathbb{R}^2$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^2$.

9. Definición. Diremos que un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es *medible* (en el sentido de Lebesgue) si para cada $E \subseteq \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$m_e(E) = m_e(E \cap A) + m_e(E \cap A^c).$$

Si A es medible, definiremos la medida (de Lebesgue) de A por

$$\mu(A) = m_e(A).$$

10. Observar que un conjunto es medible si y sólo si su complementario es medible.

11. Probar que todos los conjuntos de medida cero son medibles.

12. Probar que $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$ son medibles.

13. Proposición. Demostrar que A es medible si y sólo si para todo rectángulo Q se tiene que

$$m_e(Q) = m_e(Q \cap A) + m_e(Q \cap A^c).$$

Indicación: si $\bigcup_j R_j \supset E$, usar que $m_e(E \cap A) \leq \sum_j m_e(R_j \cap A)$ y $m_e(E \cap A^c) \leq \sum_j m_e(R_j \cap A^c)$ por la Proposición 3.

14. Probar que si A y B son medibles entonces:

a) $A \cup B$ es medible;
b) $A \cap B$ es medible;
c) $A \setminus B$ es medible;
d) todos los conjuntos obtenidos por la combinación de un número finito de operaciones de unión, intersección y complementación son medibles.

Indicación: para (1), tener en cuenta que $E \cap (A \cup B) = (E \cap A) \cup (E \cap C \cap A^c)$, luego $m_e(E \cap (A \cup B)) + m_e(E \cap (A \cup B)^c) \leq m_e(E \cap A) + m_e(E \cap B \cap A^c) + m_e(E \cap A^c \cap B^c)$, y usar ahora que B es medible y luego que A también lo es.

15. Demostrar que si A, B son medibles y disjuntos, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, y generalizar el resultado para una cantidad finita de conjuntos medibles disjuntos.

16. Demostrar, usando lo anterior, que todo rectángulo es medible.

17. Teorema. Sea (A_j) una sucesión de conjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$. Entonces $\bigcup A_j$ y $\bigcap_j A_j$ son medibles.

Indicación: Para la unión, definir $B_k = \bigcup_{j=1}^k A_j$ si $k \geq 1$, $B_0 = \emptyset$, y probar que

$$m_e(E \cap B_k) = \sum_{j=1}^{k} m_e(E \cap (B_j \setminus B_{j-1}));$$

luego usar que B_k es medible, tomar límites, y usar la subaditividad de la medida exterior.

18. Proposición. Sea (A_j) una sucesión de conjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$ tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Probar que

$$\mu(\bigcup_j A_j) = \sum_j \mu(A_j).$$

19. Proposición. Sea B_j una sucesión creciente de conjuntos medibles (es decir, $B_j \subseteq B_{j+1}$ para todo j). Probar que

$$\mu(\bigcup_j B_j) = \lim_j \mu(B_j).$$

20. Proposición. Sea (C_j) una sucesión decreciente de conjuntos medibles (es decir, $C_{j+1} \subseteq C_j$ para todo j), y supongamos que $\mu(C_1) < +\infty$. Probar que

$$\mu(\bigcap_j C_j) = \lim_j \mu(C_j).$$

21. Dar un ejemplo que muestre que la hipótesis de que $\mu(A_{j_0}) < +\infty$ para algún j_0 es necesaria para tener la igualdad de la proposición anterior.

22. Observar que todo abierto en $\mathbb{R}^n$ es una unión numerable de rectángulos.

23. Definición. Se dice que $G \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto $\mathcal{G}_\delta$ si es una intersección numerable de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Se dice que $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto $\mathcal{F}_\sigma$ si es unión numerable de conjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$.

24. Observar que los abiertos (y también los cerrados) son simultáneamente $\mathcal{G}_\delta$ y $\mathcal{F}_\sigma$.

25. Teorema. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) A es medible
b) para todo $\varepsilon > 0$ existe G abierto tal que $A \subseteq G$ y $m_e(G \setminus A) < \varepsilon$
c) para todo $\varepsilon > 0$ existe F cerrado tal que $F \subseteq A$ y $m_e(A \setminus F) < \varepsilon$
d) existen $G \in \mathcal{G}_\delta$ y Z tales que $A = G \setminus Z$ y $\mu(Z) = 0$.
e) existen $F \in \mathcal{F}_\sigma$ y Z tales que $A = F \cup Z$ y $\mu(Z) = 0$.

26. Corolario. Probar que si A es medible entonces

$$\begin{aligned} \mu(A) \;=\; & \inf\{\mu(G) \,:\, G \text{ abierto }, A \subseteq G\} = \\ & \sup\{\mu(F) \,:\, F \text{ cerrado }, F \subseteq A\} = \\ & \sup\{\mu(K) \,:\, K \text{ compacto }, K \subseteq A\}. \end{aligned}$$

27. Se define el conjunto de Cantor C como el conjunto que queda al dividir el intervalo $[0, 1]$ en tres subintervalos iguales, quitar el del medio, después repetir la operación en los dos intervalos subsistentes, y así sucesivamente... una cantidad numerable de pasos. Demostrar que el conjunto C así obtenido es compacto, tiene medida cero, y no es numerable.

28. Modificar la construcción del conjunto de Cantor para demostrar que existen un conjunto abierto y denso en $[0, 1]$ con medida estrictamente menor que uno.

29. Observación. Existen conjuntos no medibles.

El siguiente resultado, conocido popularmente como *Paradoja de Banach y Tarski*, es uno de los teoremas más sorprendentes de la matemática, y prueba en particular que no puede encontrarse una definición coherente y satisfactoria de volumen susceptible de ser aplicada a cualquier conjunto de $\mathbb{R}^3$. Lo que nos dice este teorema es que podemos romper la bola unidad del espacio $\mathbb{R}^3$ en una cantidad finita de trozos disjuntos y, mediante movimientos rígidos (rotaciones más traslaciones), recomponer estos trozos de manera también disjunta para obtener dos bolas idénticas a la original.

30. Teorema. [Banach-Tarski, 1932] Sea B la bola unidad de $\mathbb{R}^3$. Existen cinco subconjuntos $A_1, ..., A_5$ de B que forman una partición de B, es decir, $B = \cup_{i=1}^5 A_i$, con $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, y existen cinco movimientos rígidos $f_1, ..., f_5 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tales que

$$\bigcup_{i=1}^{2} f_i(A_i) = B = \bigcup_{i=3}^{5} f_i(A_i),$$

siendo los miembros de cada una de estas dos uniones disjuntos dos a dos.

De hecho, este teorema es equivalente al siguiente resultado de apariencia más general.

31 (Banach-Tarski)**.** Sean X e Y subconjuntos acotados y con interior no vacío de $\mathbb{R}^3$. Entonces existen una partición de X en subconjuntos disjuntos dos a dos, $X = X_1 \cup ... \cup X_m$, y movimientos rígidos $f_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $1 \leq i \leq m$, tales que los $f_i(X_i)$ son disjuntos dos a dos, y

$$Y = \bigcup_{i=1}^{m} f_i(X_i).$$

Por muy extraño que pueda parecer, este resultado, si bien contraviene el sentido común, no viola ninguna ley de la lógica o las matemáticas; simplemente nos indica que existen conjuntos tan patológicos que no pueden tener ni volumen ni medida.

Una demostración relativamente elemental del teorema de Banach-Tarski puede encontrarse en el siguiente artículo: K. Stromberg, *The Banach-Tarski paradox*, American Mathematical Monthly, vol. 86 (1979) no. 3, p. 151-161.

Por todo esto, ninguna teoría de la medida o de la integral puede ser lo suficientemente rica y coherente a la vez para dar cuenta de todos los subconjuntos del espacio $\mathbb{R}^n$. Sólo podrá definirse medida, volumen o integral para determinados conjuntos o funciones. Hay diversas teorías de la medida y de la integral. En este curso desarrollaremos la teoría de la integral de Lebesgue, que es la más flexible de todas (y la mejor desde casi cualquier punto de vista excepto que lleva más tiempo construirla).

Resumen

Hemos construído la medida de Lebesgue, que asigna a determinados (no todos) subconjuntos A de $\mathbb{R}^n$, llamados medibles, su medida $\mu(A)$, y esta asignación tiene las siguientes propiedades:

a) Todos los conjuntos abiertos, todos los cerrados, y todos los que se obtienen de estos por medio de una cantidad contable de operaciones de unión, intersección y complementación son medibles.

b) Para cada $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible se tiene

$$\mu(A) = \inf\{\mu(G) \,:\, G \supseteq A \text{ abierto } \} = \sup\{\mu(K) \,:\, K \subseteq A \text{ compacto } \}.$$

c) Si (A_j) es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, entonces $\mu(\bigcup_j A_j) = \sum_j \mu(A_j)$.

d) Si (B_j) es una sucesión creciente de conjuntos medibles entonces $\mu(\bigcup_j B_j) = \lim_j \mu(B_j)$.

e) Si (C_j) es una sucesión decreciente de conjuntos medibles y alguno de ellos tiene medida finita, entonces $\mu(\bigcap_j C_j) = \lim_j \mu(C_j)$.

f) Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ tiene medida cero si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de rectángulos (Q_j) tales que $A \subseteq \bigcup Q_j$ y $\sum_j v(Q_j) \leq \varepsilon$.

g) La unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero;

h) Cualquier subconjunto numerable de $\mathbb{R}^n$ tiene medida cero.

i) Si $A \subseteq B$ y B tiene medida cero, entonces A también tiene medida cero.