CÁLCULO INTEGRAL. HOJA 10.

INTEGRALES SOBRE CAMINOS.

1. Definición. Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un camino de clase C^1 a trozos. Definimos la longitud de γ por

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Es conveniente observar que no todos los caminos continuos y C^1 a trozos tienen longitud finita (ver el ejercicio 3).

2. Probar que si $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un camino de clase C^1 a trozos, entonces

$$\ell(\gamma) \geq \|\gamma(b) - \gamma(a)\|$$

(dicho de otra manera, la linea recta es el camino más corto entre dos puntos). Demostrar que, de hecho,

$$\ell(\gamma) = \sup\{\sum_{i=1}^{k} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \ : \ a = t_0 < t_1 < ..., t_k = b, k \in \mathbb{N}\},$$

es decir, la longitud de γ es el supremo de las longitudes de todos los caminos poligonales con vértices en algún punto de la traza de γ.

3. Sea $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el camino definido por $\gamma(t) = (t, t \operatorname{sen}(1/t))$ si $t > 0$, y $\gamma(0) = (0, 0)$. Probar que γ es continuo y de clase C^1 a trozos en $[0, 1]$ y de hecho es diferenciable de clase C^∞ en $(0, 1]$, pero su longitud es infinita.

4. Probar que si γ es de Lipschitz entonces $\ell(\gamma)$ es finita; deducir, en particular, si γ es de clase C^1 en todo $[a, b]$ entonces tiene longitud finita.

5. Hacer un dibujo de la traza de los siguientes caminos, y calcular su longitud:

(a) $\gamma(t) = (R \cos 2t, R \sin 2t)$, $0 \leq t \leq \pi$.
(b) $\gamma(t) = (R \cos t, -R \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
(c) $\gamma(t) = (R \cos t^2, R \sin t^2)$, $0 \leq t \leq \sqrt{2\pi}$.
(d) $\gamma(t) = (t^4, t^4)$, $-1 \leq t \leq 1$.
(e) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 4\pi$.
(f) $\gamma(t) = (R \cos 2t, R \sin 2t)$, $0 \leq t \leq \pi$.
(g) $\gamma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$, $0 \leq t < \infty$ (espiral logarítmica).
(h) $\gamma(t) = (t^3, t^2)$, $-2 \leq t \leq 2$.
(i) $\gamma(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$, $-4 \leq t \leq 4$.

6. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 a trozos. Probar que la longitud de la gráfica de f sobre $[a, b]$ es

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

7. Definición. Sea $\alpha : [a,b] \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$ un camino C^1 a trozos, y sea $h : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ una biyección de clase C^1. Entonces, la composición

$$\beta = \alpha \circ h : [c,d] \longrightarrow A,\ \beta(t) = \alpha(h(t)),$$

se dice que es una reparametrización de α. Es claro que si β es reparametrización de α entonces ambos caminos tienen la misma traza e incluso la misma longitud (justificar por qué). Así, h no es más que un cambio de variable que modifica la rapidez con que se recorre el camino. En efecto, nótese que $\beta'(t) = \alpha'(h(t))h'(t)$, de modo que el vector velocidad de β se multiplica por el factor escalar $h'(t)$. Además, como h es una biyección C^1, h es o bien estrictamente creciente, o bien o estrictamente decreciente, y la derivada $h'(t)$ no cambia de signo; en el primer caso se tendrá $h(c) = a$ y $h(d) = b$, luego β recorre la traza de α en el mismo sentido que lo hace α (se dice entonces que la reparametrización β *conserva la orientación*); y en el segundo caso es $h(c) = b$ y $h(d) = a$, luego β recorre la traza de α en sentido opuesto al que lo hace α: comienza en $\alpha(b)$ y termina en $\alpha(a)$ (en este caso se dice que β *invierte la orientación*).

8. Reparametrización de curvas por la longitud de arco.
Un camino $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es *regular* si es de clase C^1 y tiene la propiedad de que$\gamma'(t) \neq 0$ para todo t. Se dice que un camino regular γ está *parametrizada por la longitud de arco* si

$$\int_a^t \|\gamma'(s)\| ds = t - a$$

para todo $t \in [a,b]$, es decir, el parámetro $t - a$ coincide con la longitud de la curva recorrida por γ desde el instante $s = a$ hasta el tiempo $s = t$. Comprobar que γ está parametrizado por la longitud de arco si y sólo si

$$\|\gamma'(t)\| = 1$$

para todo $t \in [a,b]$, es decir, el vector velocidad del camino tiene longitud constante e igual a 1. Después, demostrar que todo camino regular puede reparametrizarse por la longitud de arco. Es decir, si $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un camino regular, existe otro camino $\beta : [0,l] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ parametrizado por la longitud de arco tal que α y β tienen la misma traza y la misma longitud.

Indicación: Definir

$$u = u(t) = \int_a^t \|\alpha'(s)\| ds;$$

entonces, como $u'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ para todo t, la función $u = u(t)$ tiene una inversa diferenciable $u^{-1} : [0,l] \longrightarrow [a,b]$. Poner entonces $\beta = \alpha \circ u^{-1}$, y comprobar que β y α tienen la misma traza, y $\|\beta'(s)\| = 1$ para todo s.

9. Sean α y β dos caminos que tienen la misma traza. Supongamos que ambos son inyectivos excepto en una cantidad finita de puntos. Probar que α y β tienen la misma longitud.

10. Definamos $\alpha : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\alpha(t) = \begin{cases} (-e^{-1/t^2}, e^{-1/t^2}) & \text{si } t < 0; \\ (0,0) \quad \text{si } t = 0; \\ (e^{-1/t^2}, e^{-1/t^2}) & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

y sea $\beta : [-e^{-1}, e^{-1}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\beta = (t, |t|)$. Probar que α y β tienen la misma traza (a saber, un trozo de la gráfica de la función valor absoluto); sin embargo α es de clase C^∞ en todo su dominio, mientras que β no es diferenciable en el origen. No obstante, obsérvese que $\alpha'(0) = 0$;

es decir, α debe detenerse en $t = 0$ para poder ser diferenciable en ese punto. Generalizar este hecho: probar que si $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ es un camino diferenciable y su traza coincide con la gráfica de una función f cuyas derivadas laterales (no necesariamente finitas) son diferentes en un punto x_0 (y en particular la función no es derivable en ese punto), entonces $\alpha'(t) = 0$ para todos los t tales que $x(t) = x_0$. Por otra parte, si sólo se supone que f no es derivable en x_0, probar que al menos se tiene $x'(t) = 0$ para todo t con $x(t) = x_0$.

11. Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un camino C^1 tal que $\gamma'(t) \neq 0$ para todo t. Probar que $\|\gamma(t)\|$ es una constante no nula si y sólo si el vector velocidad $\gamma'(t)$ es ortogonal al vector posición $\gamma(t)$ para todo t.

12. Un camino α de clase C^2 tiene la propiedad de que su segunda derivada $\alpha''(t)$ es idénticamente cero. ¿Qué puede decirse sobre α?

13. Sea γ una curva en el plano cuya expresión en coordenadas polares viene dada por $\rho = \rho(\theta)$, con $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Demostrar que su longitud es

$$\ell(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta.$$

14. Calcular la longitud de la cardioide $\rho = a(1 + \cos\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

15. Definición. Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar continua, y $\gamma : [a, b] \longrightarrow A$ un camino C^1 a trozos sobre su dominio. Se define la integral de f sobre γ por

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\| dt.$$

Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, un campo vectorial continuo sobre la imagen de un camino C^1 a trozos $\gamma : [a, b] \longrightarrow A$ con longitud finita. Se define la integral de linea de F sobre γ por la fórmula

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt,$$

donde $F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ denota el producto escalar de $F(\gamma(t))$ con $\gamma'(t)$.

16. Sean $\alpha : [a, b] \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$ un camino C^1 a trozos, y $\beta : [c, d] \longrightarrow A$ una reparametrización de α. Entonces, para todo campo escalar $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, es

$$\int_\alpha f ds = \int_\beta f ds,$$

y para todo campo vectorial $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$, se tiene que, o bien

$$\int_\beta F \cdot ds = \int_\alpha F \cdot ds, \text{ si } \beta \text{ conserva la orientación,}$$

o bien

$$\int_\beta F \cdot ds = -\int_\alpha F \cdot ds, \text{ si } \beta \text{ invierte la orientación.}$$

17. En los siguientes casos, calcular la integral de f a lo largo de γ:

(a) $f(x, y) = 1 + y$; $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $0 \leq t \leq 3\pi/2$.
(b) $f(x, y, z) = xyz$; $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 3)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(c) $f(x,y,z) = x + y + z$; $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

18. En los siguientes casos, calcular la integral del campo F a lo largo de la curva γ:

(a) $F(x,y) = (-x^2y, xy^2)$; $\gamma(t) = (\sin t, \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(b) $F(x,y,z) = (x,y,z)$; $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(c) $f(x,y,z) = (y^2, x^2)$; $\gamma \equiv \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, y \geq 0\}$, recorrida en sentido positivo.

19. Calcular:

(a) $\int_\gamma ydx - xdy$; $\quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(b) $\int_\gamma x^2dx + xydy$; $\quad \gamma$ es el cuadrado de vértices $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$, en sentido positivo.

(c) $\int_\gamma \sin zdx + \cos zdy - (xy)^{1/3}dz$; $\quad \gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, t)$, $0 \leq t \leq 7\pi/2$.

(d) $\int_\gamma ydx + (3y^2 - x)dy + zdz$; $\quad \gamma(t) = (t, t^n, 0)$, $0 \leq t \leq 1$; siendo $n \in \mathbb{N}$.

(e) $\int_\gamma 2xydx + (x^2 + z)dy + ydz$; $\quad \gamma$ es el segmento de $(1,0,2)$ a $(3,4,1)$.

(f) $\int_\gamma xydx + yzdy + xzdz$; $\quad \gamma \equiv \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, z = x, y \geq 0\}$.

20. Consideramos la fuerza $F(x,y,z) = (x,y,z)$. Calcular el trabajo realizado al mover una particula sobre la parábola $y = x^2, z = 0$, desde $x = 1$ hasta $x = 2$.