CÁLCULO INTEGRAL. HOJA 11.

CAMPOS CONSERVATIVOS.

1. Definición. Se dice que un campo vectorial continuo $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un *campo vectorial gradiente* si existe un cierto campo escalar $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $F = \nabla f$. En este caso se dice que f es una función o campo *potencial* para F.

2. Teorema. Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar de clase C^1, y $\gamma : [a, b] \longrightarrow A$ un camino C^1 a trozos. Entonces

$$\int_\gamma \nabla f \cdot ds = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Por tanto, si $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial gradiente y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función potencial suya, entonces, para todo par de puntos $p, q \in A$ y para todo camino C^1 a trozos γ con traza contenida en A y que comience en p y acabe en q, se tiene

$$\int_\gamma F \cdot ds = f(q) - f(p).$$

3. Sea $\gamma(t) = (t^4/4, \sin^3(\pi t/2))$. Calcular la integral de linea

$$\int_\gamma y dx + x dy.$$

4. Sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial definido por

$$F(x, y, z) = (xy, y, z).$$

Probar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = F$.

5. Definición. Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo, y sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow A$ un camino C^1 a trozos. Se dice que $\int_\gamma F \cdot ds$ es independiente del camino γ si para cualquier otro camino C^1 a trozos $\sigma : [c, d] \longrightarrow A$ se tiene que

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_\sigma F \cdot ds.$$

6. Teorema de caracterización de los campos conservativos. Sea A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. F es un campo gradiente, es decir, existe una función potencial $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $F = \nabla f$;
2. $\int_\gamma F \cdot ds = 0$ para todo camino cerrado γ;
3. $\int_\gamma F \cdot ds$ es independiente del camino γ.

   Si además F es de clase C^1 y A es un abierto *convexo*, las afirmaciones anteriores también equivalen a la siguiente:

4. Para todos $i, j = 1, ..., n$ se tiene que

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}.$$

De un campo F que satisfaga una de estas propiedades (y por tanto todas) se dice que es un *campo conservativo.*

Demostración: Si α, β son caminos tales que α acaba en el punto que β empieza, existe un camino $\alpha * \beta$ (al que llamaremos concatenación de α y β) que primero recorre α y cuando llega al final de éste comienza a recorrer β hasta su punto final. El camino $\alpha * \beta$ es único salvo una reparametrización que conserva la orientación.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Es consecuencia del teorema 2
(2) $\Longrightarrow$ (3): Sean $\gamma_1 : [a_1, b_1] \longrightarrow A$ y $\gamma_2 : [a_2, b_2] \longrightarrow A$ dos caminos C^1 a trozos con el mismo comienzo $p = \gamma(a_i)$ y el mismo final $q = \gamma(b_i)$, $i = 1, 2$. Entonces, si $-\gamma_2$ es el camino inverso a γ_2, se tiene que $\gamma = \gamma_1 * (-\gamma_2)$ es un camino cerrado en A luego, por hipótesis, $\int_\gamma F \cdot ds = 0$. Pero

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_{\gamma_1} F \cdot ds + \int_{-\gamma_2} F \cdot ds = \int_{\gamma_1} F \cdot ds - \int_{\gamma_2} F \cdot ds,$$

y se deduce que $\int_{\gamma_1} F \cdot ds = \int_{\gamma_2} F \cdot ds$.
(3) $\Longrightarrow$ (1): sea $a \in A$. No hay pérdida de generalidad en suponer que A es conexo (si no lo fuera podríamos trabajar en cada una de sus componentes conexas). Como A es un abierto de $\mathbb{R}^n$, resulta que A es conexo por caminos e incluso conexo por caminos poligonales; en particular A es conexo por caminos C^1 a trozos. Así, dado cualquier $x \in A$ podemos escoger un camino C^1 a trozos $\gamma_x : [0, 1] \longrightarrow A$ tal que $\gamma_x(0) = a$ y $\gamma_x(1) = x$. Definamos entonces $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \int_{\gamma_x} F \cdot ds$$

para cada $x \in A$. Por la condición (3), es claro que la definición de $f(x)$ no depende de la elección de γ_x. Veamos que f es diferenciable en A y que $\nabla f(x) = F(x)$ para cada $x \in A$. Fijemos $x \in A$. Como F es continuo en x, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|h\| \leq \delta$ entonces $\|F(x + h) - F(x)\| \leq \varepsilon$. Nótese que, por la condición (3), si σ denota el segmento $[x, x + h]$, entonces

$$\int_{\gamma_x} F \cdot ds + \int_\sigma F \cdot ds = \int_{\gamma_x * \sigma} F \cdot ds = \int_{\gamma_{x+h}} F \cdot ds,$$

puesto que tanto γ_{x+h} como $\gamma_x * \sigma$ son caminos que empiezan en a y terminan en $x + h$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} f(x + h) - f(x) &= \int_{\gamma_{x+h}} F \cdot ds - \int_{\gamma_x} F \cdot ds \\ &= \int_\sigma F \cdot ds = \int_0^1 F(x + th) \cdot h dt, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} &\big|f(x + h) - f(x) - F(x) \cdot h\big| = \Big| \int_0^1 \big(F(x + th) - F(x)\big) \cdot h dt\Big| \\ &\leq \int_0^1 \|F(x + th) - F(x)\| \cdot \|h\| dt \leq \int_0^1 \varepsilon \|h\| dt = \varepsilon \|h\|, \end{aligned}$$

para todo h tal que $\|h\| \leq \delta$. Esto prueba que f es diferenciable en x y $\nabla f(x) = F(x)$.
(1) $\Longrightarrow$ (4): Si $\nabla f = F$ (es decir, $\partial f / \partial x_i = F_i$, $i = 1, ..., n$) y F es C^1 entonces f es de clase C^2 y, por el teorema de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

lo que significa que

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}.$$

(4) $\Longrightarrow$ (1): Fijemos un punto $a \in A$. Para cada $x \in A$ sea σ_x el segmento que une a con x,

$$\sigma_x(t) = tx + (1-t)a, \qquad t \in [0,1].$$

La traza de σ_x está dentro de A por ser este conjunto convexo. Definamos $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \int_{\sigma_x} F \cdot ds$$

para cada $x \in A$. Tenemos que comprobar que $\nabla f(x) = F(x)$, es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = F_j(x)$$

para cada $x \in A$, $j = 1, ..., n$. Utilizando el teorema de derivación bajo el signo integral y la hipótesis de simetría de las derivadas, e integrando por partes al final, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\int_0^1 \sum_{j=1}^n F_j(a+t(x-a))(x_j-a_j)dt\Big) \\
&= \int_0^1 \left[\left(\sum_{j=1}^n t\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(a+t(x-a))(x_j-a_j)\right) + F_i(a+t(x-a))\right] dt \\
&= \int_0^1 \Big(\sum_{j=1}^n t\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a+t(x-a))(x_j-a_j)dt + \int_0^1 F_i(a+t(x-a))\Big)dt \\
&= \int_0^1 t\nabla F_i(a+t(x-a))(x-a)dt + \int_0^1 F_i(a+t(x-a))dt \\
= \quad & F_i(x) - \int_0^1 F_i(a+t(x-a))dt + \int_0^1 F_i(a+t(x-a))dt = F_i(x),
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos. $\square$

7. Sean $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, y $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$F(x,y) = (P,Q) = \Big(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\Big).$$

Comprobar que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

en A, y que sin embargo F no es un campo gradiente: por ejemplo, si σ es un camino que recorre una vez la circunferencia unidad entonces $\int_\sigma F \cdot ds \neq 0$.

8. Calcular:

(a) $\int_\gamma xdy + ydx$, si γ es un camino cualquiera que une $(-1,2)$ con $(2,3)$.
(b) $\int_\gamma yzdx + zxdy + xydz$, si γ es un camino cualquiera de $(1,1,1)$ a $(1,2,3)$.

9. Probar que dos funciones de potencial para un mismo campo vectorial (definido en un abierto conexo) difieren a lo sumo en una constante.

10. Calcular una función de potencial para el campo $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$F(x,y) = (3x^2 + y, e^y + x).$$

11. Sea $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el campo definido por

$$F(x,y) = \Big(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\Big).$$

(a) Calcular $\int_\gamma F$, siendo $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Deducir que F no es conservativo.

(b) Encontrar un abierto $A \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tal que $F_{|A}$ sea conservativo.

12. Comprobar que el campo $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x,y,z) = (y, z\cos yz + x, y\cos yz)$$

es conservativo, y calcular un potencial.

13. Sea F un campo vectorial definido en un abierto de $\mathbb{R}^3$. Comprobar que se satisface la condición de simetría del teorema de caracterización de los campos conservativos,

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i},$$

$i, j = 1, 2, 3$, si y sólo si $\mathrm{rot}F = 0$, donde el *rotacional* de $F = (F_1, F_2, F_3)$ por

$$\mathrm{rot}F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.$$

14. Sea $\sigma : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el camino definido por

$$\sigma(t) = (e^{t-1}, \sin\frac{\pi}{t}).$$

Calcular la integral de linea

$$\int_\sigma 2x\cos y dx - x^2 \sin y dy.$$

15. Demostrar que el campo gravitatorio de la tierra es irrotacional, y calcular una función de potencial suya.

16. Sea $F(x,y,z) = (2xyz + \sin x, x^2 z, x^2 y)$. Encontrar una función f tal que $\nabla f = F$.

17. Calcular $\int_\gamma F \cdot ds$, donde $\gamma(t) = (\cos^5 t, \sin^3 t, t^4)$, y F es el campo del ejercicio anterior.