CÁLCULO INTEGRAL. HOJA 13.

INTEGRALES SOBRE SUPERFICIES. TEOREMAS DE STOKES Y GAUSS.

Una superficie es una variedad diferenciable de dimensión dos, que en este curso consideraremos siempre inmersa en el espacio $\mathbb{R}^3$. Una variedad diferenciable S de dimensión dos en $\mathbb{R}^3$ puede describirse como un subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ con la propiedad de que todo punto p de S tiene un entorno abierto V en $\mathbb{R}^3$ tal que $S \cap V$ coincide con el conjunto de ceros de una función $F : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $DF(q) \neq 0$ para todo $q \in V \cap S$.

En virtud del teorema de la función implícita, esto equivale a decir que todo punto p de S tiene un entorno abierto W en $\mathbb{R}^3$ tal que $S \cap W$ puede verse como la gráfica de una función de clase C^1, es decir, $S \cap W$ es igual, bien al conjunto de puntos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tales que $z = f(x, y)$ para cierta f de clase C^1 en $W_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in W$ para algún $z\}$, o bien al conjunto de los (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tales que $y = g(x, z)$ para cierta g de clase C^1 en $W_2 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in W$ para algún $y\}$, o bien al conjunto de los (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tales que $x = h(y, z)$ para cierta h de clase C^1 en $W_1 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in W$ para algún $x\}$. El ejemplo de una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ en $\mathbb{R}^3$ ilustra perfectamente las diversas situaciones.

Otra forma equivalente de definir una variedad diferenciable S de dimensión dos en $\mathbb{R}^3$ es decir que para cada punto p de S existen un entorno abierto V en $\mathbb{R}^3$ y una función inyectiva $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tal que $S \cap V = \Phi(D)$, y que si $\Psi : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es otra función con esta propiedad, entonces $\Psi^{-1} \circ \Phi : D \to A$ es un difeomorfismo de clase C^1.

A su vez esto equivale a decir que para todo punto $p \in S$ existen un entorno abierto V en $\mathbb{R}^3$ y una aplicación inyectiva $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que su derivada $D\Phi(u, v)$ tiene rango 2 para todo $(u, v) \in D$, y $\Phi(D) = S \cap V$.

Recordemos también que el plano tangente TS_p a un punto p de una superficie S en $\mathbb{R}^3$ se puede definir como el conjunto de vectores velocidad, en el punto p, de todas las curvas de clase C^1 cuya traza está contenida en S y que pasan por p. Si S está definida en un entorno de p por una ecuación implícita $F(x, y, z) = 0$ entonces $TS_p = \mathrm{Ker} DF(p)$, es decir, el vector gradiente de F en p es perpendicular a TS_p. Por otro lado, si S está descrita en un entorno de p como imagen de un abierto D de $\mathbb{R}^2$ por una aplicación inyectiva Φ de clase C^1 cuya diferencial tiene rango 2, entonces $TS_p = D\Phi(u_p, v_p)(\mathbb{R}^2)$, donde $\Phi(u_p, v_p) = p$.

Conviene subrayar que TS_p es un plano vectorial. Para obtener el plano afín que pasa por p y es tangente a S en p, hay que sumar el punto p a dicho plano vectorial.

Aquí nos limitaremos a considerar casi en exclusiva un caso especial de superficie en $\mathbb{R}^3$, llamado superficie paramétrica simple, que es el de una superficie S que puede describirse, en su totalidad, como $\Phi(D)$, donde $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación inyectiva de clase C^1 cuya diferencial tiene rango 2 en todos los puntos, y D es un abierto de $\mathbb{R}^2$ que puede describirse como la región interior a una curva cerrada simple regular a trozos (es decir, a la que se puede aplicar el Teorema de Green).

1. Definición Se dice que una superficie S de $\mathbb{R}^3$ es una *superficie paramétrica simple* si existen un abierto acotado D de $\mathbb{R}^2$ cuya frontera es una curva cerrada simple regular a trozos, y una aplicación $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ inyectiva y de clase C^1 tal que su diferencial $D\Phi(u, v)$ tiene rango 2 para todo $(u, v) \in D$, y además $S = \Phi(D)$.

De Φ diremos que es una parametrización de S. Evidentemente una misma superficie paramétrica simple S puede tener varias parametrizaciones diferentes.

En el caso de que Φ pueda extenderse (con las mismas propiedades) a un abierto mayor A que contenga a la adherencia de D, llamaremos borde de S, y denotaremos por ∂S, a la curva

cerrada en $\mathbb{R}^3$ definida por $\Phi(C)$, donde $C = \partial D$. Esta curva se supondrá siempre, salvo que se diga explícitamente lo contrario, orientada en el mismo sentido que resulte de componer Φ con una parametrización de C recorrida en sentido positivo. Del compacto $\overline{S} = \Phi(\overline{D})$ diremos que es una superficie paramétrica simple compacta y con borde.

Conviene señalar que, aunque empleemos la misma notación, el borde geométrico ∂S así definido de una tal superficie S *no coincide* con su frontera topológica (en efecto, ésta es toda $\overline{S}$ ya que S tiene interior vacío).

2. Demostrar que el hemisferio norte de una esfera, es decir, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$, es una superficie paramétrica simple con borde $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z = 0$.

3. Definición Sea $\Phi : D \to S \subset \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie paramétrica simple S. Denotemos

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) .$$

Llamaremos *producto vectorial fundamental* al producto vectorial de las derivadas parciales

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v},$$

es decir

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\mathbf{i} - \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\mathbf{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\mathbf{k},$$

donde $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son los vectores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, y

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v},$$

es decir el determinante jacobiano de la aplicación $(u, v) \mapsto (f(u, v), g(u, v))$.

Recordemos que el producto vectorial de vectores en $\mathbb{R}^3$ tiene las siguientes propiedades (siendo a, b y c vectores de $\mathbb{R}^3$, y $\lambda \in \mathbb{R}$):

1. $a \times b = -b \times a$;
2. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$;
3. $\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b$;
4. $\|a \times b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 - (a \cdot b)^2$;
5. $a \times b = 0$ si y sólo si a y b son linealmente dependientes;
6. si a y b son linealmente independientes entonces $a \times b$ es un vector perpendicular al plano generado por a y b, de norma $\|a\|\|b\| \operatorname{sen} \theta$ (donde $\theta \in (0, \pi)$ es el ángulo que forman a y b, es decir $\|a \times b\|$ es el área del paralelogramo determinado por a y b), y el sentido de $a \times b$ es el de avance o retroceso de un sacacorchos que gire de a hasta b.

Puesto que $\frac{\partial \Phi}{\partial u} = D\Phi(u, v)(1, 0)$ y $\frac{\partial \Phi}{\partial v} = D\Phi(u, v)(0, 1)$ son vectores del plano tangente a S en $p = \Phi(u, v)$ y son linealmente independientes (por tener $D\Phi(u, v)$ rango 2), es inmediato, teniendo en cuenta la propiedad 6, que el producto vectorial fundamental

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v)$$

es un vector perpendicular a TS_p, donde $p = \Phi(u, v)$, es decir el producto vectorial fundamental define un campo vectorial perpendicular a la superficie S.

4. Supongamos que S es la gráfica de una función de clase C^1 definida en un abierto D de $\mathbb{R}^2$, es decir, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ z = f(x, y)\}$, donde $f : D \to \mathbb{R}$ es una función de

clase C^1. Una parametrización natural de S es la proporcionada por $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$,

$$\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

En este caso el producto vectorial fundamental viene dado por

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) = -\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) - \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + \mathbf{k}.$$

5. Se define el vector normal a una superficie paramétrica simple S parametrizada por $\Phi : D \to S$ en un punto p como

$$\mathbf{N}(p) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v)$$

para cada $p = \Phi(u, v) \in S$, y el vector normal unitario a S como

$$\mathbf{n}(p) = \frac{1}{\|\mathbf{N}(p)\|}\mathbf{N}(p).$$

6. Definición. Sea S una superficie paramétrica simple parametrizada por $\Phi : D \to S \subset \mathbb{R}^3$. Definimos el área de S como la integral en D de la norma del producto vectorial fundamental asociado a Φ, es decir

$$a(S) = \int_D \|\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v)\| dudv.$$

Para justificar esta definición, consideremos una parametrización $\Phi : D \to S$ de una superficie paramétrica simple S. Consideremos también, en el plano $\mathbb{R}^2$, que contiene a D, una cuadrícula muy fina paralela a los ejes de coordenadas. Las porciones de rectas de esta cuadrícula que están contenidas en D se transforman mediante la aplicación inyectiva Φ en curvas que no se cortan y que forman una "cuadrícula curva" dentro de S. Los "rectángulos curvos" de esta cuadrícula en S se aproximan bien, si la cuadrícula es suficientemente fina, por paralelogramos T en $\mathbb{R}^3$ (en general ya no contenidos en S), que son imagen mediante la diferencial de Φ, en ciertos puntos $(u_Q, v_Q) \in D$ de la cuadrícula, de rectángulos Q de la cuadrícula original. Hágase un dibujo. El área de cada uno de los paralelogramos T viene dada por

$$\|\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_Q, v_Q)\| \, \mu(Q),$$

y la suma de todas estas áreas, que aproxima lo que intuitivamente debería ser el área de S, es

$$\sum_Q \|\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_Q, v_Q)\| \, \mu(Q),$$

que a su vez aproxima la integral

$$\int_D \|\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v)\| dudv,$$

tanto mejor cuanto más fina sea la cuadrícula. Es entonces natural definir el área de S como dicha integral.

7. En el caso de que S sea la gráfica de una función $f : D \to \mathbb{R}$, la fórmula del ejemplo 4 para el producto vectorial fundamental asociado a su parametrización natural nos proporciona la siguiente fórmula para el área:

$$a(S) = \int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

8. Usar esta fórmula para hallar el área del hemisferio norte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

9. Definición. Sea S una superficie paramétrica simple, parametrizada por $\Phi : D \to S$, y sea $f : S \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo definido sobre S. Definimos la integral de f sobre S como

$$\int_S f = \int_D f(\Phi(u,v)) \| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v) \| dudv.$$

Por otra parte, si $F : S \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial continuo definido sobre S, definimos la integral de F sobre S por

$$\int_S F = \int_D F(\Phi(u,v)) \cdot \mathbf{N}(\Phi(u,v))\, dudv,$$

es decir, la integral del producto escalar de la normal a S con F, compuesto con Φ. Obsérvese que, puesto que

$$\mathbf{N}(\Phi(u,v)) = \mathbf{n}(\Phi(u,v)) \| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \|,$$

la integral del campo vectorial F sobre S puede verse como la integral del campo escalar $F \cdot \mathbf{n}$ sobre S, es decir, podemos denotar también

$$\int_S F = \int_S F \cdot \mathbf{n}.$$

Las interpretaciones físicas de estas integrales son variadas. Por ejemplo, un campo escalar $f : S \to \mathbb{R}$ puede representar la densidad de masa por unidad de superficie de un material de grosor despreciable que está distribuido sobre una superficie S, y entonces $\int_S f dS$ sería la masa total de dicho material.

Por su parte, la integral de un campo vectorial sobre una superficie S suele interpretarse como el flujo de un fluido que pasa a través de S. Puede imaginarse que S es una membrana porosa y que el vector $F(x,y,z) = \rho(x,y,z)V(x,y,z)$, donde $V(x,y,z)$ es el vector velocidad del fluido y el número $\rho(x,y,z)$ es su densidad de masa, es un vector que nos dice cuánta masa de fluido circula por el punto (x,y,z) en la dirección en que se mueve el fluido en ese punto, por unidad de área y de tiempo. Entonces el producto escalar $F \cdot \mathbf{n}$ representa el componente del vector densidad de flujo en la dirección de $\mathbf{n}$, y la masa de fluido que pasa a través de toda S vendrá determinada por $\int_S F \cdot \mathbf{n} = \int_S F$.

10. Lema. Sean $\Psi : D_\Psi \to S$ y $\Phi : D_\Phi \to S$ dos parametrizaciones de una misma superficie paramétrica simple S, y sea $\varphi : D_\Psi \to D_\Phi$ el difeomorfismo de clase C^1 definido por $\varphi = \Phi^{-1} \circ \Psi$. Denotemos $(u,v) = \varphi(s,t)$. Entonces

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)},$$

donde $\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}$ denota el jacobiano de φ.

Demostración: Por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s},$$

y también

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Multiplicando vectorialmente los miembros de la derecha de ambas igualdades, utilizando las propiedades del producto vectorial, y en particular usando que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u} = 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial v} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v},$$

se obtiene la igualdad de enunciado.

11. Teorema. Sean $\Psi : D_\Psi \to S$ y $\Phi : D_\Phi \to S$ dos parametrizaciones de una misma superficie paramétrica simple S, y sea $f : S \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo. Entonces

$$\int_{D_\Phi} f(\Phi(u,v))\|\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v)\|dudv = \int_{D_\Psi} f(\Psi(s,t))\|\frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t}(u,v)\|dsdt.$$

Es decir, la integral $\int_S f dS$ definida en 9 no depende de la parametrización escogida. En particular, si tomamos $f \equiv 1$, obtenemos que el área de S no depende de la parametrización escogida.

Demostración: Denotemos $(u,v) = \varphi(s,t)$, donde $\varphi = \Phi^{-1} \circ \Psi$ como en el lema anterior. Se tiene que $\Psi = \Phi \circ \varphi$, y aplicando el teorema del cambio de variables junto con el lema anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{D_\Phi} f(\Phi(u,v))\|\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v)\|dudv = \\
&\int_{D_\Psi} f(\Phi(\varphi(s,t)))\|\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u(s,t),v(s,t))\| \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\right| dsdt = \\
&\int_{D_\Psi} f(\Psi(s,t))\|\frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t}(u,v)\|dsdt. \ \square
\end{aligned}$$

El resultado análogo para campos vectoriales depende del sentido en que apunte la normal unitaria a S correspondiente a la parametrización en cuestión.

12. Teorema. Sean $\Psi : D_\Psi \to S$ y $\Phi : D_\Phi \to S$ dos parametrizaciones de una misma superficie paramétrica simple S, denotemos

$$\mathbf{N}_\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \text{ y } \mathbf{N}_\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

y sean

$$\mathbf{n}_\Phi = \frac{1}{\|\mathbf{N}_\Phi\|}\mathbf{N}_\Phi, \text{ y } \mathbf{n}_\Psi = \frac{1}{\|\mathbf{N}_\Psi\|}\mathbf{N}_\Psi.$$

Entonces, o bien $\mathbf{n}_\Phi(p) = \mathbf{n}_\Psi(p)$ para todo $p \in S$, o bien $\mathbf{n}_\Phi(p) = -\mathbf{n}_\Psi(p)$ para todo $p \in S$. En el primer caso diremos que las parametrizaciones Φ y Ψ inducen la misma orientación en S, y en el segundo caso diremos que inducen orientaciones opuestas.

Si Φ y Ψ inducen la misma orientación entonces, para todo campo vectorial continuo $F : S \to \mathbb{R}^3$ se tendrá que

$$\int_S F \cdot \mathbf{n}_\Phi = \int_S F \cdot \mathbf{n}_\Psi,$$

mientras que si Φ y Ψ inducen orientaciones opuestas en S entonces será

$$\int_S F \cdot \mathbf{n}_\Phi = -\int_S F \cdot \mathbf{n}_\Psi.$$

Indicación: aplicar la definición y el teorema anterior.

Una vez definidos los conceptos de área y de integral sobre una superficie paramétrica simple podemos extenderlos a muchas otras superficies que, sin ser paramétricas simples, pueden descomponerse como unión finita de superficies paramétricas simples que son disjuntas entre sí salvo quizás en curvas de clase C^1 a trozos (que tienen área nula por definición). Por ejemplo, una esfera no es una superficie paramétrica simple, pero puede descomponerse como su hemisferio norte más el hemisferio sur, que sí que son superficies paramétricas simples y disjuntas salvo en el ecuador, que es una curva de clase C^1. El área de la esfera puede definirse entonces como el área del hemisferio norte más la del hemisferio sur. Lo mismo puede hacerse con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$,

$0 \leq z \leq 1$. Por su parte un toro puede verse como unión de dos cilindros curvos pegados por las circunferencias de sus bordes, y por tanto puede expresarse como unión de cuatro superficies paramétricas simples disjuntas dos a dos salvo en curvas de clase C^1.

De hecho, puede demostrarse (aunque no lo haremos aquí) que toda superficie compacta S en $\mathbb{R}$ puede descomponerse en una cantidad finita $S_1, ..., S_N$ de superficies paramétricas simples que sólo se cortan una a otra a lo sumo en curvas de clase C^1 a trozos. Entonces podemos definir el área de S como la suma de las áreas de las S_i, $i = 1, ..., N$. Por supuesto habría que probar que si $S'_1, ..., S'_M$ es otra descomposición de S en superficies paramétricas simples que sólo se cortan en curvas C^1 a trozos, entonces la suma de las áreas de $S'_1, ..., S'_M$ es igual a la suma de las áreas de $S_1, ..., S_N$, lo cual no es difícil.

De manera análoga pueden extenderse los conceptos de integral de funciones escalares y de campos vectoriales a toda superficie compacta en $\mathbb{R}^3$.

13. Calcular el área de las superficies siguientes:

(a) La parte de la esfera unitaria dentro del cono $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$.
(b) La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = Ry$.
(c) La parte del cono $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ limitada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

14. Sean $0 < b < a$. Calcular el área del toro obtenido al girar la circunferencia del plano xz con centro en $(a, 0, 0)$ y radio b en el plano xz alrededor del eje z. Las ecuaciones paramétricas del toro son:

$$\begin{aligned} x &= (a + b\cos v)\cos u \\ y &= (a + b\cos v)\sin u \\ z &= b\sin v, \end{aligned}$$

con $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. Hallar también la mormal exterior unitaria a la superficie del toro. En el dibujo, $a = 5$, y $b = 1$.

Recordemos que si $F : A \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto A de $\mathbb{R}^3$, se define el rotacional del campo $F = (P, Q, R)$, y se denota por $rotF$, como

$$rotF = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

15. Teorema de Stokes. Sea S una superficie paramétrica simple con borde ∂S, parametrizada por $\Phi : \overline{D} \to \overline{S}$, donde D es la región interior a una curva cerrada simple C regular a trozos en $\mathbb{R}^2$ orientada positivamente, y $\partial S = \Phi(C)$ se supone orientada en el sentido que resulte de componer C con Φ. Sea F un campo vectorial de clase C^1 definido en un entorno abierto de S en $\mathbb{R}^3$, y con valores en $\mathbb{R}^3$. Entonces se tiene que

$$\int_S \text{rot}F = \int_{\partial S} F.$$

Otra forma de escribir la igualdad de estas integrales es la siguiente:

$$\begin{aligned} &\int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy \\ &= \int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz, \quad (*) \end{aligned}$$

donde $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$, $dx \wedge dy$ denotan, respectivamente,

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \ \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \ \text{y} \ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

Así, por ejemplo,

$$\int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz$$

equivale a escribir

$$\int_D \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} dudv.$$

Es interesante observar que cuando S es una región del plano xy encerrada por una curva cerrada simple regular a trozos y $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ el teorema de Stokes se reduce a la fórmula de Green.

16. Definición. Llamaremos *sólido simple* a todo conjunto compacto V de $\mathbb{R}^3$ homeomorfo a una bola y cuya frontera ∂V es una superficie orientable (que puede descomponerse en una cantidad finita de superficies paramétricas simples con bordes, orientadas de tal manera que en los trozos de curva donde dos de estas superficies se peguen, las orientaciones sean opuestas). Supondremos que dicha frontera está orientada con la normal unitaria $\mathbf{n}$ apuntando hacia el exterior de V. Recordemos que la divergencia de un campo vectorial $F = (P, Q, R)$ en $\mathbb{R}^3$ se define por

$$\text{div}F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

17. Teorema de la divergencia (Gauss). Sea V un sólido simple de $\mathbb{R}^3$ y $S = \partial V$ su borde, orientado con la normal unitaria exterior $\mathbf{n}$. Sea $F : V \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1. Entonces

$$\int_V divF = \int_S F.$$

18. En los siguientes casos, calcular la integral de f sobre la superficie S:

(a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$; $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.

(b) $f(x,y,z) = xyz$; S es el triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,2,0,$ $(0,1,1)$.

(c) $f(x,y,z) = z$; $S = \{(x,y,z) : z = x^2 + y^2 \leq 1\}$.

19. Determinar la masa de una lámina circular de radio R, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia del punto al centro, y vale 1 en el borde.

20. En los siguientes casos, calcular la integral del campo F sobre la superficie S.

(a) $F(x,y,z) = (x, y, -y)$; $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1; 0 \leq z \leq 1\}$ orientada con la normal exterior.

(b) $F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$; S es la superficie del tetraedro limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$, orientada con la normal exterior.

(c) $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$; $S = \{(x,y,z) : z^2 = x^2 + y^2, 1 \leq z \leq 2\}$, orientada con la normal exterior.

(d) $F(x,y,z) = (x, y, z)$; $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$, orientada con la normal exterior.

21. Consideramos las superficies $S_1 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$, $S_2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+(z-1)^2 = 1, z \geq 1\}$ y $S = S_1 \cup S_2$. Sea el campo $F(x,y,z) = (zx+z^2y+x, z^3xy+y, z^2x^2)$.

Calcular

$$\int_S \mathrm{rot} F.$$

22. Demostrar que si S es una superficie sin borde (por ejemplo, una esfera, o un toro en $\mathbb{R}^3$) entonces

$$\int_S \mathrm{rot} F = 0$$

para todo campo vectorial F de clase C^1 en S. Indicación: Cortar y pegar.

23. Utilizar el teorema de la divergencia para calcular $\int_S F$, donde $F(x,y,z) = (xy^2, x^2y, y)$, y S consta de:

$$\{x^2+y^2=1, -1<z<1\} \cup \{x^2+y^2 \leq 1, z=1\} \cup \{x^2+y^2 \leq 1, z=-1\}.$$

24. Consideramos $f(x,y,z) = x^2+2xy+z^2-3x+1$, $F(x,y,z) = (e^{-xy}+z, z\sin y, x^2-z^2+y^2)$, y sea $V = \{(x,y,z) : 0 \leq z \leq 3-x^2-y^2, x^2+y^2+z^2 \geq 4z-3\}$. Calcular

$$\int_{\partial V} \nabla f + rot F.$$

25. Sean $V = \{(x,y,z) : 0 \leq z \leq 1-x^2-y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$, $S = \{(x,y,z) : z = 1-x^2-y^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, y sea C el borde de S.

(a) Calcular el área de S.
(b) Calcular el volumen de V.
(c) Calcular $\int_C F$, donde $F(x,y,z) = (1-2z, 0, 2y)$.

26. Sea $B(t)$ una bola euclídea de radio $t > 0$ con centro en un punto $a \in \mathbb{R}^3$, y sea $S(t)$ la esfera correspondiente. Sea $F : B(1) \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1, y sea $\mathbf{n} = \mathbf{n}_t$ la normal unitaria exterior a $S(t)$. Probar que

$$\mathrm{div} F(a) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{\mathrm{vol}(B(t))} \int_{S(t)} F \cdot \mathbf{n}_t.$$

27. En los siguientes ejercicios, $\partial f / \partial n$ denota la derivada direccional de un campo escalar f en la dirección de la normal unitaria exterior $\mathbf{n}$ a una superficie orientable S que limita un sólido V al que se puede aplicar el teorema de la divergencia. Es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot \mathbf{n}.$$

En cada uno de los ejercicios demostrar la igualdad indicada, suponiendo la continuidad de todas las derivadas que intervienen:

1. $$\int_S \frac{\partial f}{\partial n} = \int_V \Delta f.$$

2. $$\int_S \frac{\partial f}{\partial n} = 0$$

   siempre que f sea armónica en V (se dice que f es armónica si $\Delta f := \mathrm{div} \nabla f = 0$).

3. $$\int_S f \frac{\partial g}{\partial n} = \int_V f \Delta g + \int_V \nabla f \cdot \nabla g.$$

4.
$$\int_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} \right) = \int_V (f\Delta g - g\Delta f)\,.dxdydz$$

5.
$$\int_S f\frac{\partial g}{\partial n} = \int_S g\frac{\partial f}{\partial n}$$
si f y g son ambas armónicas en V.

6.
$$\int_S f\frac{\partial f}{\partial n} = \int_V |\nabla f|^2$$
si f es armónica en V.

28. Sea V un sólido convexo de $\mathbb{R}^3$ cuya frontera es una superficie cerrada S y sea $\mathbf{n}$ la normal unitaria exterior a S. Sean F y G dos campos vectoriales de clase C^1 tales que
$$\mathrm{rot}F = \mathrm{rot}G, \quad \text{y} \quad \mathrm{div}F = \mathrm{div}G$$
en V, y que cumplen
$$F \cdot \mathbf{n} = G \cdot \mathbf{n}$$
en S. Demostrar que $F = G$ en V.
Indicación: Sea $H = F - G$; encontrar una función de potencial f para H y usar una de las igualdades del ejercicio anterior para ver que
$$\int_V |\nabla f|^2 = 0.$$

Demostración del teorema de Stokes:

Bastará probar las tres igualdades siguientes:
$$\int_{\partial S} Pdx = \int_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx \right),$$
$$\int_{\partial S} Qdy = \int_S \left(-\frac{\partial Q}{\partial z} dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy \right),$$
$$\int_{\partial S} Rdz = \int_S \left(-\frac{\partial R}{\partial x} dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz \right),$$
ya que sumándolas obtenemos $(*)$. Puesto que la demostración de las tres fórmulas es totalmente análoga, nos contentaremos con probar la primera de ellas. Hay que demostrar pues que
$$\int_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right) dudv = \int_{\partial S} Pdx \tag{1}$$
Denotemos $f(u,v) = P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Ahora utilizaremos la fórmula
$$\left(-\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(f\frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(f\frac{\partial x}{\partial u} \right), \tag{2}$$
que no es difícil comprobar. Utilizando esta igualdad y el teorema de Green en el primer miembro de (1) obtenemos
$$\int_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right) dudv =$$
$$\int_D \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(f\frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(f\frac{\partial x}{\partial u} \right) \right] dudv = \int_C f\frac{\partial x}{\partial u}du + f\frac{\partial x}{\partial v}dv. \tag{3}$$

Sea $\gamma = (u(t), v(t))$, $t \in [a, b]$, una parametrización de $C \subset \mathbb{R}^2$ recorrida en sentido positivo, entonces $\Phi \circ \gamma(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))$, $t \in [a, b]$, es una parametrización admisible de ∂S, y

$$\int_{\partial S} P dx =$$
$$\int_a^b P(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)) \frac{d}{dt}(x(u(t), v(t)))\, dt =$$
$$\int_a^b P(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)) \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt} \right) dt =$$
$$\int_C f \frac{\partial x}{\partial u} du + f \frac{\partial x}{\partial v} dv,$$

es decir

$$\int_{\partial S} P dx = \int_C f \frac{\partial x}{\partial u} du + f \frac{\partial x}{\partial v} dv,$$

lo que combinado con (3) nos da (1). □

Demostración del teorema de Gauss:

Haremos la demostración suponiendo que V es un sólido proyectable xy, proyectable yz, y proyectable xz. Que V sea proyectable xy significa que que V puede escribirse las manera siguiente:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\},$$

donde D es una región del plano xy limitada por una curva cerrada simple regular a trozos, y $\varphi, \psi : D \to \mathbb{R}$ son funciones de clase C^1 en D; es decir, V puede verse como lo que queda entre las gráficas de dos funciones de clase C^1 definidas en la proyección de V sobre el plano xy. Análogamente se define el ser proyectable xz o proyectable yz.

Sea $F = (P, Q, R)$. Como V es proyectable xy podemos escribir

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\},$$

donde D, φ, ψ cumplen las condiciones explicitadas anteriormente, y tenemos, aplicando el teorema de Fubini, que

$$\int_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \int_D R(x, y, \psi(x, y)) - R(x, y, \varphi(x, y)) dxdy. \tag{4}$$

Calculemos por otra parte la integral

$$\int_S (0, 0, R).$$

Podemos descomponer S en tres piezas, $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, donde $S_1 = \{(x, y, \varphi(x, y)) : (x, y) \in D\}$, $S_2 = \{(x, y, \psi(x, y)) : (x, y) \in D\}$, y $S_3 = \{(x, y, z) : (x, y) \in \partial D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$. En S_3 el vector normal exterior unitario $\mathbf{n}$ es perpendicular al eje z y por tanto también al campo $(0, 0, R)$, de modo que

$$\int_{S_3} (0, 0, R) \ = \ 0.$$

Por otro lado la normal $\mathbf{n}$ apunta hacia arriba en S_2 y hacia abajo en S_1, de modo que, al calcular las integrales $\int_{S_i} (0, 0, R)$ obtenemos

$$\int_{S_2} (0, 0, R) = \int_D (0, 0, R(x, y, \psi(x, y))) \cdot (-\frac{\partial \psi}{\partial x}, -\frac{\partial \psi}{\partial y}, 1) dxdy =$$
$$\int_D R(x, y, \psi(x, y)) dxdy,$$

mientras que

$$\int_{S_1} (0, 0, R) = \int_D (0, 0, R(x, y, \varphi(x, y))) \cdot (\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, -1) dxdy =$$
$$-\int_D R(x, y, \varphi(x, y)) dxdy.$$

Por tanto

$$\int_S (0,0,R) =$$
$$\int_{S_2} (0,0,R) + \int_{S_1} (0,0,R) + \int_{S_3} (0,0,R) =$$
$$\int_D R(x,y,\psi(x,y))dxdy - \int_D R(x,y,\varphi(x,y))dxdy + 0 =$$
$$\int_D \left(R(x,y,\psi(x,y)) - R(x,y,\varphi(x,y))\right) dxdy,$$

lo que combinado con (4) nos da

$$\int_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \int_S (0,0,R). \tag{5}$$

Análogamente, usando que V es proyectable xz y proyectable yz, se comprueba que

$$\int_V \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \int_S (0,Q,0), \tag{6}$$

y que

$$\int_V \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \int_S (P,0,0). \tag{7}$$

Finalmente, sumando (5), (6) y (7) obtenemos que

$$\int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \int_S (P,Q,R),$$

es decir el enunciado del teorema para sólidos proyectables en cualquiera de las tres direcciones de los ejes. La clase de dichos sólidos incluye las bolas y en general todos los sólidos convexos de $\mathbb{R}^3$.

Una vez demostrado el teorema de Gauss para sólidos convexos, podría extenderse a los sólidos más generales del enunciado siguiendo un procedimiento análogo a la parte final de la demostración del teorema de Green: se aproximaría la superficie S por una superficie S' formada por caras de triángulos orientados (y pegados unos con otros de modo que los lados que sean comunes a dos triángulos tengan orientaciones opuestas según se vean como pertenecientes a uno u otro triángulo), y esta nueva superficie S' sería la frontera de un sólido V' que podría descomponerse en unión de poliedros convexos orientados de modo que dos caras contiguas tengan normales unitarias que apuntan en sentido opuesto. El teorema de la divergencia es válido para V' y S', es decir

$$\int_{V'} \mathrm{div} F = \int_{S'} F$$

y como

$$\int_{V'} \mathrm{div} F \approx \int_V \mathrm{div} F \pm \varepsilon$$

y

$$\int_{S'} F \approx \int_S F \pm \varepsilon$$

haciendo tender ε a cero se obtendría en resultado general.