CÁLCULO INTEGRAL. HOJA 2.

ALGUNAS COSAS MÁS SOBRE LOS CONJUNTOS DE MEDIDA CERO EN $\mathbb{R}^N$.

1. Supongamos que $E \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida cero. ¿Es cierto que su adherencia también tiene medida cero?

2. Demostrar que si A tiene medida cero, entonces A tiene interior vacío. El recíproco no es cierto. ¿Por qué?

3. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función Lipschitziana, es decir, $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$ para todo x, y. Probar que para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ existe un cubo R tal que $f(Q) \subseteq R$ y

$$v(R) \leq (M\sqrt{n})^n v(Q).$$

4. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función Lipschitziana. Probar que si $E \subset A$ tiene medida cero, entonces $f(E)$ también tiene medida cero.

5. Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1. Probar que si $E \subset U$ tiene medida cero, entonces $f(E)$ también tiene medida cero.

Indicación: Expresar U como unión de compactos sobre cada uno de los cuales f sea Lipschitz, y usar el ejercicio anterior para obtener el resultado.

6. Demostrar que toda recta en $\mathbb{R}^2$ y todo plano en $\mathbb{R}^3$ tienen medida cero.

7. Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de clase C^1. Probar que la imagen de γ tiene medida cero.

8. Sean U un abierto de $\mathbb{R}^m$, y $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1, con $m < n$. Probar que entonces $g(U)$ tiene siempre medida cero en $\mathbb{R}^n$.

Indicación: considerar $\mathbb{R}^m$ como subespacio de $\mathbb{R}^n$, y aplicar apropiadamente el problema 5.

9. Probar que toda superficie diferenciable en $\mathbb{R}^3$ tiene medida cero. Más en general, probar que toda subvariedad diferenciable de dimensión k en $\mathbb{R}^n$, con $k < n$, tiene medida cero.

10. Decir cuáles de los siguientes conjuntos tienen medida cero, y por qué:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^4 = 1, x \geq 0\}$
b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, x^2 + z^2 = 4\}$
c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : mx + ny = k, m, n, k \in \mathbb{N}\}$.
d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1/n, x^2 + y^2 + z^2 \leq 5,\ n \in \mathbb{N}\}$.
e) $E = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 5\}$.