CÁLCULO INTEGRAL. HOJA 3.

FUNCIONES MEDIBLES EN $\mathbb{R}^N$.

1. Definición. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible. Se dice que $f : X \to [-\infty, +\infty]$ es medible si, para todo $t \in \mathbb{R}$, el conjunto $f^{-1}[-\infty, t) = \{x \in X \,:\, f(x) < t\}$ es medible en $\mathbb{R}^n$.

2. Proposición. Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible, y $f : X \to [-\infty, +\infty]$ una función. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) f es medible
b) $f^{-1}[t, +\infty]$ es medible para todo $t \in \mathbb{R}$
c) $f^{-1}(t, +\infty]$ es medible para todo $t \in \mathbb{R}$
d) $f^{-1}[-\infty, t]$ es medible para todo $t \in \mathbb{R}$
e) $f^{-1}(I)$ es medible para todo intervalo $I \subset [-\infty, +\infty]$.

3. Probar que si f es medible entonces los conjuntos $f^{-1}(+\infty)$, $f^{-1}(-\infty)$ y $f^{-1}(\mathbb{R})$ son medibles.

4. Proposición. Sea X un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$, y $f : X \to [-\infty, +\infty]$ una función. Denotemos $X_0 = f^{-1}(\mathbb{R})$. Probar que f es medible si y sólo si $f_0 := f_{|X_0}$ es una función medible y $f^{-1}(+\infty)$ y $f^{-1}(-\infty)$ son conjuntos medibles.

5. Teorema. Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible, y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Probar que las afirmaciones siguientes son equivalentes:

a) f es medible
b) $f^{-1}(G)$ es medible para todo abierto G de $\mathbb{R}$
c) $f^{-1}(C)$ es medible para todo cerrado C de $\mathbb{R}$.

6. Corolario Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es medible.

7. Proposición. Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, $f : X \to \mathbb{R}$ medible, y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Entonces la composición $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ es medible.

8. Definición. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, y sea $f : X \to \mathbb{R}^m$ una función, $f = (f_1, ..., f_m)$. Diremos que f es medible si lo es cada componente f_j, para $1 \leq j \leq m$.

9. Teorema. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, y sea $f : X \to \mathbb{R}^m$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f es medible
b) $f^{-1}(G)$ es medible para todo abierto G de $\mathbb{R}^m$.
c) $f^{-1}(C)$ es medible para todo cerrado C de $\mathbb{R}^m$.

10. Corolario. Sea $f : X \to \mathbb{R}^m$ una función continua definida sobre un conjunto medible $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces f es medible.

11. Proposición. Sean $X \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto medible, $f : X \to \mathbb{R}^m$ una función medible, y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ continua. Entonces la composición $g \circ f : X \to \mathbb{R}^k$ es medible.

12. Teorema. Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible, y $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones medibles. Entonces las funciones $f+g$, $c \cdot f$ (con $c \in \mathbb{R}$), $f-g$, fg, $\text{máx}\{f,g\}$, $\text{mín}\{f,g\}$, $|f|$, y f/g (cuando $g \neq 0$) son medibles.

13. Probar que el teorema anterior sigue siendo cierto si $f, g : X \to [-\infty, +\infty]$, considerando las funciones suma, producto, etc, sólo en las regiones donde están bien definidas.

14. Teorema. Sea (f_j) una sucesión de funciones medibles de X en $[-\infty, +\infty]$, donde $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto medible. Entonces:

a) $\sup_j f_j$ es medible
b) $\text{ínf}_j f_j$ es medible
c) $\text{lím}\sup_j f_j$ es medible
d) $\text{lím}\inf_j f_j$ es medible
e) $\text{lím}_j f_j$, si existe, es medible.

15. Definición. Se dice que una propiedad se verifica *en casi todo punto* de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si el subconjunto de puntos de A donde no se verifica tiene medida cero.

16. Teorema. Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ dos funciones que coinciden salvo quizás en un conjunto de medida cero (es decir, son iguales en casi todo punto de X), y supongamos que f es medible. Probar que entonces g también es medible.

17. Averiguar si las siguientes funciones son medibles:

a) $f(x,y) = e^{1/(x-y)}$ si $x \neq y$, $f(x,y) = 0$ si $x = y$.
b) $f(x,y) = e^{1/(x^2+y^2)}$ si $x^2 + y^2 \neq 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $f(x,y) = 0$ en caso contrario.
c) $f(x) = 1 - |x|^2$ si $|x| \leq 5$, $f(x) = |x|^2 + 5$ en caso contrario, $x \in \mathbb{R}^n$.
d) $f(x,y,z) = x^2 + xy + 2z + 1$ si $xyz \notin \mathbb{Q}$, y $f(x,y,z) = 1$ en caso contrario.