CÁLCULO INTEGRAL. HOJA 4.

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES MEDIBLES POSITIVAS EN $\mathbb{R}^N$.

1. Definición. Sea $\varphi : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que φ es una *función simple* si su imagen $\varphi(E)$ es un conjunto finito.

Si $\varphi(E) = \{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$, entonces φ puede escribirse como combinación lineal finita de funciones características, más concretamente,

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j},$$

donde χ_{A_j} es la función característica del conjunto $A_j := \varphi^{-1}(\alpha_j)$.

Recordemos que la función característica de un conjunto A se define por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A; \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

2. Proposición. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible, y $\varphi : E \to \mathbb{R}$ una función simple con $\varphi(E) = \{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$. Entonces φ es medible si y sólo si $A_j = \varphi^{-1}(\alpha_j)$ es medible para cada $j = 1, ..., m$.

3. Teorema. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $f : E \to [0, +\infty]$ medible. Entonces existe una sucesión de funciones simples medibles $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tales que

a) $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq ... \leq \varphi_j \leq \varphi_{j+1} \leq ... \leq f$ para todo j, y
b) $\lim_j \varphi(x) = f(x)$ para todo x (convergencia puntual).

Indicación: Para cada $j \in \mathbb{N}$ considerar $F_j = f^{-1}[j, \infty]$, y para cada $i \in \{1, 2, ..., j2^j\}$ poner $E_{j,i} = f^{-1}[\frac{i-1}{2^j}, \frac{i}{2^j})$. Definir $\varphi_j = j\chi_{F_j} + \sum_{i=1}^{j2^j} \frac{i-1}{2^j}\chi_{E_{j,i}}$ para cada j. Equivalentemente, $\varphi_j = \theta_j \circ f$, donde las $\theta_j : [0, +\infty] \to [0, +\infty)$ se definen por $\theta_j(t) = j$ si $t \geq j$, y $\theta_j(t) = \frac{i-1}{2^j}$ si $t \in [\frac{i-1}{2^j}, \frac{i}{2^j})$ para algún (único) $i \in \{1, 2, ..., j2^j\}$. Comprobar que $\theta_j(t)$ converge monótonamente a $\theta(t) = t$ para todo t, y deducir que φ_j es una sucesión creciente de funciones simples medibles que converge puntualmente a f.

4. Definición. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible, y $\varphi : E \to [0, +\infty)$ una función simple medible. Escribamos $\varphi(E) = \{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$, $A_j = \varphi^{-1}(\alpha_j)$, $\varphi = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j}$. Definimos la integral de la función simple φ como

$$\int_E \varphi = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j),$$

entendiendo que si $\alpha_{i_0} = 0$ y $\mu(A_{i_0}) = \infty$ entonces $\alpha_{i_0}\mu(A_{i_0}) = 0$; es decir, convendremos que

$$0 \cdot \infty = 0.$$

5. Lema Sean E_i, con $i \in \mathbb{N}$, conjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$ tales que $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, y sea $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Sea $\varphi : E \to [0, +\infty)$ una función simple medible. Entonces

$$\int_E \varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} \varphi_{|E_i}.$$

Indicación: si $\varphi(E) = \{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$, $A_j = \varphi^{-1}(\alpha_j)$, observar que $A_j = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_j \cap E_i)$ y $\mu(A_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_j \cap E_i)$.

6. Lema. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, y $\varphi, \psi : E \to [0, +\infty)$ funciones simples medibles. Entonces se tiene:

a) $\int_E (\varphi + \psi) = \int_E \varphi + \int_E \psi$
b) $\int_E c \cdot \varphi = c \int_E \varphi$ para todo $c \in [0, +\infty)$
c) Si $\varphi \leq \psi$ entonces $\int_E \varphi \leq \int_E \psi$.

Indicación: pongamos $\varphi = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j}$ y $\psi = \sum_{j=1}^{p} \beta_i \chi_{B_i}$. Para probar (1), observar que $\varphi + \psi$ es constante de valor $\alpha_j + \beta_i$ en $A_j \cap B_i$, que $E = \bigcup_{i,j}(A_j \cap B_i)$, y aplicar el lema anterior. Para probar (3), observar que si $A_j \cap B_i \neq \emptyset$ entonces $\alpha_j \leq \beta_i$, y aplicar el lema anterior.

7. Definición. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y $f : E \to [0, +\infty]$ una función medible. Definimos la integral de f en E por

$$\int_E f = \sup\{\int_E \varphi \ \mid \ \varphi : E \to [0, +\infty) \text{ simple y medible }, \varphi \leq f\},$$

que es un número en $[0, +\infty]$.

8. Probar que si $\psi : E \to [0, +\infty)$ es simple y medible entonces las dos definiciones que tenemos de $\int_E \psi$ coinciden.

9. Proposición. Sean $f, g : E \subseteq \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ funciones medibles. Entonces:

a) $\mu(E) = 0 \implies \int_E f = 0$
b) $f = 0 \implies \int_E f = 0$
c) $f \leq g \implies \int_E f \leq \int_E g$
d) Si $A \subseteq E$ es medible, entonces

$$\int_A f_{|A} = \int_E f \cdot \chi_A$$

e) Si $A \subseteq B \subseteq E$ son medibles, entonces $\int_A f \leq \int_B f \leq \int_E f$.

Indicación: Para probar (4), suponer primero que $\varphi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i} \leq f \cdot \chi_A$, y observar que si $x \in A_i \setminus A$ entonces $\alpha_i = 0 = \varphi(x)$.

10. Lema. Sea $\psi : E \to [0, +\infty)$ una función simple medible, donde $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ es una unión creciente (es decir, $E_i \subseteq E_{i+1}$ para todo i) de conjuntos medibles. Entonces $\int_E \psi = \lim_j \int_{E_j} \psi$.

11. Teorema de la convergencia monótona. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible, y sea $f_j : E \to [0, +\infty]$, $j \in \mathbb{N}$, una sucesión de funciones medibles tales que

a) $f_j \leq f_{j+1}$ para todo j, y
b) $\lim_j f_j(x) = f(x)$ para todo $x \in E$ (convergencia puntual).

Entonces $f : E \to [0, +\infty]$ es medible, y

$$\int_E f = \lim_j \int_E f_j.$$

Indicación: Para probar que el límite es mayor o igual que $\int_E f$, tomar $c \in (0,1)$, φ simple medible con $0 \leq \varphi \leq f$, considerar $E_j = \{x \in E : f_j(x) \geq c\varphi(x)\}$ y aplicar el lema anterior. Después hacer $c \to 1$, y finalmente tomar supremos en φ.

12. Corolario. Sean $f, g, f_j : E \subseteq \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ funciones medibles, y c un número con $0 < c < +\infty$. Entonces:

a) $\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$
b) $\int_E cf = c \int_E f$
c) $\int_E \sum_{j=1}^{\infty} f_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int_E f_j$.

Indicación: para las dos primeras propiedades, combinar el Teorema 3, el Teorema de la convergencia monótona, y usar que el resultado que quiere probarse es verdad para las funciones simples.

13. Corolario. Sea $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ una unión disjunta (es decir, $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$) de conjuntos medibles, y sea $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ medible. Entonces $\int_E f = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f$.

14. Proposición. Sean $g, f : E \to [0, +\infty]$, al menos una de ellas medible, y supongamos que $f = g$ en casi todo punto. Entonces la otra también es medible, y $\int_E f = \int_E g$.

15. Calcular la integral de $f(x, y) = x$ en $E = [0, 1] \times [0, 1]$.