CÁLCULO INTEGRAL. HOJA 5.

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES NO NECESARIAMENTE POSITIVAS EN $\mathbb{R}^N$.

1. Definición. Sea $f : E \to [-\infty, +\infty]$. Se define la *parte positiva* de f como

$$f^+ = \text{máx}\{f, 0\} = \frac{|f| + f}{2},$$

y la *parte negativa* de f por

$$f^- = \text{máx}\{-f, 0\} = -\,\text{mín}\{f, 0\} = \frac{|f| - f}{2}.$$

Es inmediato comprobar que f es medible si y sólo f^+, f^- son medibles, y que

$$f = f^+ - f^-, \quad \text{y} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

2. Definición. Diremos que $f : E \to [-\infty, +\infty]$ es integrable (en el sentido de Lebesgue) en E si f es medible y además $\int_E f^+$ y $\int_E f^-$ son ambas finitas. En este caso definimos la integral de f en E como

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

3. Probar que f es integrable en E si y sólo si f es medible y $\int_E |f| < +\infty$.

4. Lema. Sea $f : E \to [-\infty, +\infty]$. Supongamos que $f = g - h$, donde $g, h : E \to [0, +\infty]$ son integrables. Entonces f es integrable, y $\int_E f = \int_E g - \int_E h$.

5. Teorema. Sean $f, g : E \to [-\infty, +\infty]$ integrables. Entonces $f + g$ y λf son integrables para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, y además

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g, \quad \text{y}$$

y

$$\int_E \lambda f = \lambda \int_E f.$$

Indicación: escribir $f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$ y usar el lema anterior.

6. Proposición. Sea $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ integrable. Entonces

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|.$$

7. Proposición. Sea $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ integrable, y sea $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, unión *disjunta* de conjuntos medibles. Entonces

$$\int_E f = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f.$$

8. Proposición. Sea $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ integrable, y supongamos que $g = f$ en casi todo punto de E. Entonces g es integrable, y $\int_E f = \int_E g$.

9. Proposición. Sea $f : E \to [0, +\infty]$ medible. Supongamos que $\int_E f = 0$. Entonces $f = 0$ en casi todo punto de E.

Indicación: para cada $j \in \mathbb{N}$, considerar $A_j = \{x \in E : f(x) > 1/j\}$, tener en cuenta que $0 \leq \frac{1}{j}\chi_{A_j} \leq f$, y probar que $\mu(A_j) = 0$.

10. Probar que el resultado anterior no es cierto si no se supone $f \geq 0$.

11. Lema de Fatou. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, y (f_j) una sucesión de funciones medibles $f_j : E \to [0, +\infty]$. Entonces

$$\int_E \liminf_j f_j \leq \liminf_j \int_E f_j.$$

Indicación: aplicar el teorema de la convergencia monótona a la sucesión $g_k = \inf_{j \geq k} f_j$.

12. Teorema de la convergencia dominada. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, (f_j) sucesión de funciones $f_j : E \to [-\infty, +\infty]$ medibles que converge puntualmente a una función $f : E \to [-\infty, +\infty]$. Supongamos que existe una función integrable $g : E \to [-\infty, +\infty]$ que domina a todas las f_j, es decir, $|f_j(x)| \leq g(x)$ para todo $x \in E$. Entonces:

a) f_j y f son integrables en E,
b) $\lim_j \int_E |f_j - f| = 0$,
c) $\lim_j \int_E f_j = \int_E f$.

Indicación: para probar (2), aplicar el Lema de Fatou a la sucesión de funciones $2g - |f_j - f|$.

13. Estudiar si pueden o no aplicarse el Teorema de la Convergencia Monótona y el Teorema de la Convergencia Dominada a las siguientes sucesiones de funciones:

a) $f_n(x) = n\chi_{[0,1]\times[0,1]}(x)$
b) $f_n(x, y) = \frac{n}{n^2+x^2+y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
c) $f_n(x, y) = \frac{n}{n^2+x^2+y^2}$, $(x, y) \in B((0, 0), 5)$
d) $f_n(x) = \frac{2x}{n^2}\chi_{[0,n]}(x)$
e) $f_n(x, y) = (-1)^n \frac{2x+3y}{n}\chi_{[0,n]\times[0,n]}(x, y)$
f) $f_n(x, y) = \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n e^{-2(x+y)}\chi_{[0,n]\times[0,n]}(x, y)$
g) $f_n(x) = x^n(1 - x)\chi_{[0,1]}(x)$
h) $f_n(x) = \frac{n}{n^2+x^2}\chi_A(x) + \chi_B(x)$, donde A y B son subconjuntos disjuntos de $\mathbb{R}$ tales que $m_e(A \cup B) < m_e(A) + m_e(B)$.

14. Probar que en el teorema de la convergencia monótona y en el teorema de la convergencia dominada las hipótesis pueden debilitarse comò sigue. Para el TCD basta que f_j converja a f en casi todo punto, y que $|f_j| \leq g$ en casi todo punto. Para el TCM basta que $f_j \leq f_{j+1}$ en casi todo punto y que f_j converja a f en casi todo punto.

15. Calcular el límite

$$\lim_n \int_0^1 \frac{n \operatorname{sen}(x^2/n)}{x^2} dx.$$

16. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función medible, y sea $S = \{x \in [0, 1] : f(x) \in \mathbb{Z}\}$. Probar que

$$\mu(S) = \lim_n \int_0^1 |\cos(\pi f(x))|^n dx.$$

17. Sea $(z_j) \subset \mathbb{R}^n$ una sucesión tal que $|z_j| \to +\infty$, y sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función integrable. Probar que para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$,

$$\lim_j \int_{z_j+K} f = 0.$$

18. Sea $f : [0,1] \to [0,+\infty)$ medible, y sea $A_n = \{x \in [0,1] : n-1 \leq f(x) < n\}$. Probar que f es integrable si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(A_n) < +\infty$.

19. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible. Consideremos las funciones en $\mathbb{R}^n$:

$$f_m(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } |f(x)| \leq m \ ; \\ 0, & \text{si } |f(x)| > m, \end{cases} \quad \text{y} \quad g_m(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } |f(x)| \leq m; \\ m\frac{f(x)}{|f(x)|}, & \text{si } |f(x)| > m. \end{cases}$$

Probar que f_m y g_m son siempre medibles, y que son integrables cuando f lo es, y en este caso además

$$\lim_m \int_{\mathbb{R}^n} f_m = \lim_m \int_{\mathbb{R}^n} g_m = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

20. Sea f integrable en $B(x_0, r_0)$, y supongamos que f es continua en x_0. Demostrar que

$$f(x_0) = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\mu(B(x_0, r))} \int_{B(x_0,r)} f(x)dx.$$