CÁLCULO INTEGRAL. HOJA 6.

RELACIÓN ENTRE LAS INTEGRALES DE RIEMANN Y DE LEBESGUE EN UNA VARIABLE.

1. Teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable (en el sentido de Lebesgue) y definamos $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_a^x f$$

para cada $x \in [a, b]$. Demostrar que si f es continua en un punto $c \in (a, b)$ entonces F es derivable en c, y

$$F'(c) = f(c).$$

2. Regla de Barrow. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, y sea G una función derivable tal que $G' = f$ (es decir una primitiva de f. Demostrar que

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

3. Justificar que toda la maquinaria usada en Análisis de Variable Real para el cálculo de integrales de Riemann (es decir, integración por partes, cambio de variable, etc) sirve asimismo para el cálculo de integrales de Lebesgue.

4. Teorema (Lebesgue). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces:

1. f es integrable Riemann si y sólo si f es continua en casi todo punto de $[a, b]$
2. Si f es integrable Riemann entonces f es integrable Lebesgue, y las integrales coinciden.

Indicación: Sean $D = \{x \in [a, b] : f \text{ es discontinua en } x\}$, y $D_j = \{x \in [a, b] : \forall \delta > 0 \exists y \in [a, b] \ t.q. \ |y - x| < \delta, |f(y) - f(x)| \geq 1/j\}$; entonces $D = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$. El objetivo es probar que $\mu(D) = 0$ si y sólo si f es integrable Riemann. para ello, si $P = \{a = t_0 < t_1 ... < t_{n-1} < t_n = b\}$ es una partición de $[a, b]$, denotaremos $U(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(t_k - t_{k-1})$ la suma superior asociada a esta partición, y $L(f, P) = \sum_{k=1}^{n} n_k(t_k - t_{k-1})$ la suma inferior, donde $M_k := \sup\{f(x) : x \in [t_{k-1}, t_k]\}$ y $m_k := \inf\{f(x) : x \in [t_{k-1}, t_k]\}$.

Paso 1: si $\mathrm{m}_e(D) > 0$, existe un j con $\mathrm{m}_e(D_j) > 0$. Probar que

$$\sum_{(t_{k-1}, t_k) \cap D_j \neq \emptyset} (M_k - m_k)(t_k - t_{k-1}) \geq \frac{1}{j} \mu(D_j),$$

y concluir que f no puede ser integrable.

Paso 2. Si $\mu(D) = 0$, sea $P_n = \{a = t_0^n < t_1^n ... < t_n^n = b\}$ la partición de $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud, es decir $t_k^n = a + k(b - a)/n$, definamos $g_n = \sum_{k=1}^{n} s_k \chi_{(t_{k-1}^n, t_k^n)}$, donde $s_k = s_k^n$ es un número cualquiera entre m_k y M_k. Probar que $g_n \to f$ en casi todo punto de $[a, b]$ (concretamente, en $[a, b] \setminus (D \cup \{t_k^n : 0 \leq k \leq n, n \in \mathbb{N}\})$). Usando el teorema de la convergencia dominada, probar que f es integrable Lebesgue y $\int_a^b g_n \to \int_a^b f$. Después, eligiendo $s_k = M_k$, ver que $\int_a^b g_n = U(f, P_n)$ (y tomando $s_k = m_k$ que $\int_a^b g_n = L(f, P_n)$), y deducir que $U(f, P_n) - L(f, P_n) \to 0$ y que f es integrable Riemann, y que la integral de Riemann de f coincide con la de Lebesgue.

5. Probar que la función $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ es integrable Lebesgue (y $\int_0^1 f = 0$), pero no es integrable Riemann.

6. Sean $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < b$. Sea $f : (a, b) \to [0, +\infty)$ localmente integrable. Probar que

$$\int_a^b f = \lim_{\alpha \to a^+,\, \beta \to b^-} \int_\alpha^\beta f$$

y además, si f es integrable Riemann impropia en (a, b) entonces f es integrable Lebesgue en (a, b), y las integrales coinciden.

7. Sean $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < b$. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ localmente integrable. Supongamos que existe $M \geq 0$ tal que $\int_\alpha^\beta |f| \leq M$ para todo $\alpha, \beta \in (a, b)$ con $\alpha \leq \beta$. Probar que f es integrable (Lebesgue) en (a, b), y

$$\int_a^b f = \lim_{\alpha \to a^+,\, \beta \to b^-} \int_\alpha^\beta f.$$

8. Probar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n+1} e^{2x^2} dx = \frac{e-1}{2}.$$