CÁLCULO INTEGRAL. HOJA 7.

EL TEOREMA DE FUBINI.

1. Recordar o, si no se ha visto nunca, probar que todo abierto de $\mathbb{R}$ se puede escribir como unión numerable disjunta de intervalos abiertos.

2. Demostrar que todo abierto G de $\mathbb{R}^2$ puede escribirse como unión numerable y *disjunta* de conjuntos de la forma $[a, b) \times [c, d)$ (a los que llamaremos rectángulos semiabiertos).

Indicación: cuadricular el plano según las rectas $x = n$ e $y = m$, con $n, m \in \mathbb{Z}$ y escoger los rectángulos de esta cuadrícula que estén en G; después dividir en cuatro cuadrados cada uno de los cuadrados de toda la cuadrícula anterior y tomar todos los subcuadrados que estén contenidos en G pero no en ninguno de los cuadrados elegidos en el primer paso. Repetir el proceso indefinidamente para obtener una colección de subcuadrados de la forma $[a, b) \times [c, d)$ disjuntos dos a dos y cuya unión sea G.

3. Generalizar el resultado del problema anterior al espacio $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$.

4. Definición. Consideremos la descomposición $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d$, con k, d enteros positivos. Para cada $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$ denotaremos $z = (x, y)$, con $x = (z_1, ..., z_k)$, $y = (z_{k+1}, ..., z_n)$. Si $A \subset \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^d$, definimos la sección del conjunto A determinada por y como

$$A_y = \{x \in \mathbb{R}^k : (x, y) \in A\}.$$

5. Comprobar que

$$\left(\bigcup_j A_j\right)_y = \bigcup_j (A_j)_y, \quad \left(\bigcap_j A_j\right)_y = \bigcap_j (A_j)_y, \quad (A \setminus B)_y = A_y \setminus B_y.$$

6. Notación. Si $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d$, denotaremos por μ_n, μ_k, μ_d las medidas de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^d$ respectivamente. Omitiremos estos subíndices y pondremos simplemente μ cuando la dimensión del espacio se sobrentienda por el contexto.

7. Sea C un conjunto no medible en $\mathbb{R}^k$. Probar que $A = C \times \{0\}$ es medible en $\mathbb{R}^{k+1}$. Concluir que las secciones A_y de un conjunto medible A en $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d$ no son, en general, medibles en $\mathbb{R}^k$.

No obstante, *casi todas* las secciones de un conjunto medible son medibles, como prueba el siguiente

8. Teorema (Principio de Cavalieri). Sea A un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d$. Entonces, para casi todo $y \in \mathbb{R}^d$, la sección A_y es medible en $\mathbb{R}^k$, la función $y \mapsto \mu_k(A_y)$ (definida en casi todo $\mathbb{R}^d$) es medible, y satisface

$$\mu_n(A) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu_k(A_y) dy.$$

Estrategia de la prueba:

Paso 1. Supongamos primero que A es un rectángulo semiabierto, es decir $A = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$. Entonces $A = A^k \times A^d$, donde A^k, A^d son rectángulos del mismo tipo en $\mathbb{R}^k$ y $\mathbb{R}^d$. Se tiene $A_y = A^k$ si $y \in A^d$, y $A_y = \emptyset$ si $y \notin A^d$. Concluir que la función $y \mapsto \mu_k(A_y)$ está definida en todo $\mathbb{R}^d$ y es simple medible, y $\int_{\mathbb{R}^d} \mu_k(A_y)dy = \mu_k(A^k)\mu_d(A^d) = \mu_n(A)$.

Paso 2. Supongamos ahora que A es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Según el ejercicio 3, podemos escribir $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$, unión disjunta de rectángulos semiabiertos, y según el ejercicio 5 se tiene $A_y = \bigcup_{j=1}^{\infty}(R_j)_y$, unión disjunta. Deducir que $\mathbb{R}^d \ni y \mapsto \mu_k(A_y) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_k((R_j)_y)$ es medible, y usando el paso anterior demostrar que $\int_{\mathbb{R}^d} \mu_k(A_y)dy = \mu_n(A)$.

Paso 3.1. Supongamos que A es un conjunto medible y acotado. Aplicar el teorema de estructura de los conjuntos medibles para encontrar una sucesión decreciente de abiertos acotados (G_j) y otra sucesión creciente de compactos (K_j) de $\mathbb{R}^n$ tales que $K_j \subset A \subset G_j$ y $\lim_j \mu_n(G_j \setminus K_j) = 0$.

Definamos $B = \bigcup_j K_j$ y $C = \bigcap_j G_j$, de modo que $B \subseteq A \subseteq C$, $\mu_n(A) = \mu_n(C)$, y para todo $y \in \mathbb{R}^d$ los conjuntos $C_y = \bigcap_j (G_j)_y$ y $B_y = \bigcup_j (K_j)_y$ son medibles.

3.2. Puesto que los $G_j \setminus K_j$ son abiertos, puede aplicarse el paso anterior para probar que $\int_{\mathbb{R}^d} \mu_k((G_j \setminus K_j)_y)dy \to 0$ si $j \to \infty$. Deducir entonces que $\int_{\mathbb{R}^d} \mu_k((C \setminus B)_y)dy = 0$, y que por tanto $\mu_k((C \setminus B)_y) = 0$ en casi todos los puntos y de $\mathbb{R}^d$, lo que implica que A_y es medible para casi todos los y (los mismos).

3.3. Probar también que $\mu_k((G_j)_y) \to \mu_k(A_y)$ cuando $j \to \infty$ para casi todo y, y deducir que la función $y \mapsto \mu_k(A_y)$ (definida en casi todo punto) es medible.

3.4. Usar ahora que $\int_{\mathbb{R}^d} \mu_k((G_1)_y)dy < \infty$, $\mu_k((G_j)_y) \leq \mu_k((G_1)_y)$, 3.3 y el teorema de la convergencia dominada para deducir que $\mu_n(A) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu_k(A_y)dy$.

Paso 4. Supongamos por fin que A es un conjunto medible arbitrario. Escribir $A = \bigcup_j A_j$, unión creciente de conjuntos medibles acotados. Probar que, para casi todo y, $\lim_j \mu_k((A_j)_y) = \mu_k(A_y)$. Aplicar el teorema de la convergencia monótona y el paso anterior para concluir el resultado.

9. Corolario. Probar que si A tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$ entonces casi todas sus secciones A_y tienen medida cero en $\mathbb{R}^k$.

10. Observación. Análogamente se tiene que $\mu_n(A) = \int_{\mathbb{R}^k} \mu_d(A^x)dx$, donde $A^x = \{y \in \mathbb{R}^d : (x, y) \in A\}$ denotan las secciones de A respecto de la otra variable.

11. Definición. Sea $f : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d \to [-\infty, +\infty]$. Definimos la sección de f determinada por $y \in \mathbb{R}^d$ como la función $f_y : \mathbb{R}^k :\to [-\infty, +\infty]$,

$$f_y(x) = f(x, y).$$

12. Comprobar que $(\chi_A)_y = \chi_{A_y}$, y deducir del principio de Cavalieri que

$$\int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d} \chi_A(x, y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \chi_A(x, y)dx \right) dy.$$

13. Teorema de Fubini para f positiva. Sea $f : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ medible. Entonces, para casi todo $y \in \mathbb{R}^d$ la sección $f_y : \mathbb{R}^k \to [0, +\infty]$ es medible, y por lo tanto la función

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y)dx \in [0, +\infty]$$

está definida para casi todo $y \in \mathbb{R}^d$; además esta función es medible y satisface

$$\int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d} f(x, y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y)dx \right) dy,$$

donde el primer miembro de la igualdad denota $\int_{\mathbb{R}^n} f$.

Indicación:

Paso 1. El ejercicio anterior prueba el resultado para funciones características. Por linealidad de la integral se extiende inmediatamente a funciones simples medibles positivas.

Paso 2. Para el caso general, sea (φ_j) una sucesión creciente de funciones simples medibles positivas que converge a f. Probar que las secciones $(\varphi_j)_y$ convergen a la sección f_y y son medibles para casi todo y. Deducir que f_y es medible para casi todo y, y usando el teorema de la convergencia monótona probar que $\int_{\mathbb{R}^k} f_y(x)dx = \lim_j \int_{\mathbb{R}^k} (\varphi_j)_y(x)dx$ para casi todo y.

Paso 3. Definamos $F(y) = \int_{\mathbb{R}^k} f_y(x)dx$, $\Phi_j(y) = \int_{\mathbb{R}^k} (\varphi_j)_y(x)dx$. Aplicar de nuevo el teorema de la convergencia monótona a las sucesiones $(\Phi_j) \nearrow F$ c.t.p y $(\varphi_j) \nearrow f$ para concluir el resultado.

14. Teorema de Fubini para f integrable. Sea $f : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces, para casi todo $y \in \mathbb{R}^d$ la sección $f_y : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ es integrable, y por lo tanto la función

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)dx \in \mathbb{R}$$

está definida para casi todo $y \in \mathbb{R}^d$; además esta función es integrable y satisface

$$\int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)dx \right) dy.$$

Indicación: aplicar el teorema anterior a las funciones f^+, f^-.

15. Observación. Análogamente se prueba un teorema de Fubini para las secciones f_x de f por x, obteniendo la fórmula

$$\int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)dy \right) dx.$$

16. Probar que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es integrable entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}} \left(\cdots \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(z_1, ..., z_n) dz_{j_1} \right) dz_{j_2} \right) \cdots \right) dz_{j_n},$$

donde $\{z_{j_1}, ..., z_{j_n}\}$ es cualquier permutación de $\{z_1, ..., z_n\}$.

17. Teorema de Tonelli. Sea $f : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ medible. Si una de las integrales iteradas

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^k} |f(x,y)|dx \right) dy \text{ o bien } \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x,y)|dy \right) dx$$

es finita, entonces la función es integrable.

Indicación: aplicar el teorema de Fubini para f positiva a la función $|f|$.

18. Proposición. Si $A \subseteq \mathbb{R}^k$ y $B \subseteq \mathbb{R}^d$ son conjuntos medibles en $\mathbb{R}^k$ y $\mathbb{R}^d$ respectivamente entonces su producto $A \times B$ es medible en $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d$, y

$$\mu_n(A \times B) = \mu_k(A)\mu_d(B).$$

Indicación: Suponiendo $A \times B$ medible, es fácil verificar la fórmula $\mu_n(A \times B) = \mu_k(A)\mu_d(B)$ aplicando el teorema de Fubini a $\chi_{A\times B}(x,y) = \chi_A(x)\chi_B(y)$. Para probar que $A \times B$ es medible, seguir estos pasos:

1. Demostrar que el producto de dos conjuntos G_δ es un conjunto G_δ, y en particular medible, luego se le aplica la fórmula anterior.

2. Usando el teorema de estructura de los conjuntos medibles, escoger conjuntos G_δ G, H, G^*, H^* tales que $G \supseteq A$, $H \supseteq B$, $\mu_k(G \setminus A) = 0$, $\mu_d(H \setminus B) = 0$, $G \setminus A \subseteq G^*$, $H \setminus B \subseteq H^*$, y G^* y H^* son de medida cero. Usando que $\mu_n(G^* \times H) = \mu_k(G^*)\mu_d(H)$ (por ser conjuntos G_δ), etc, y que $(G \times H) \setminus (A \times B) = ((G \setminus A) \times H) \cup (A \times (H \setminus B))$, probar que este conjunto tiene medida cero, y deducir que $A \times B$ es medible.

19. Corolario. Si $A \subseteq \mathbb{R}^k$ y $B \subseteq \mathbb{R}^d$ son conjuntos medibles en $\mathbb{R}^k$ y $\mathbb{R}^d$ respectivamente, y $f : A \times B \to \mathbb{R}$ es integrable, entonces

$$\int_{A \times B} f(x, y) dx dy = \int_B \left(\int_A f(x, y) dx \right) dy.$$