CÁLCULO INTEGRAL. HOJA 8.

APLICACIÓN DEL TEOREMA DE FUBINI. CÁLCULO DE INTEGRALES EN RECINTOS PROYECTABLES.

1. Se dice que $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es proyectable sobre el eje x si existen funciones $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x) \leq y \leq \psi(x),\ x \in [a,b]\}$ (alguna de las desigualdades o las dos podrían también ser estrictas, y el intervalo $[a,b]$ podría ser abierto o semiabierto). Probar que si φ y ψ son medibles, entonces A es medible.

2. Probar que si $f : [a,b] \to [0,+\infty)$ es medible, entonces $\int_a^b f$ es la medida del conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$ (es decir, el área que queda debajo de la gráfica de f y encima del eje de las x).

3. Calcular las siguientes integrales iteradas:

(a) $\int_{-1}^{1} \int_0^1 (x^4 y + y^2) dy dx$

(b) $\int_0^1 \int_{e^x}^{e^{2x}} x \log y dy dx$

(c) $\int_0^1 \int_0^{\frac{arcseny}{y}} y \cos(xy) dx dy$

4. Expresar las integrales iteradas siguientes como integrales múltiples sobre un recinto, dibujar el recinto y cambiar el orden de intergración; finalmente, hallar el valor de las integrales usando el orden de integración que dé lugar a los cálculos más simples.

(a) $\int_{-3}^{2} \int_0^{y^2} (x^2 + y) dx dy$

(b) $\int_1^2 \int_0^{\log x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}} dy dx$

(c) $\int_{-1}^{1} \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dy dx$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos x} y \sin x dy dx$

(e) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y (x + 2y + 3z) dz dy dx$

(f) $\int_0^1 \int_0^{f(y)} xy dx dy$, donde $f(y) = \text{mín}\{1, \log \frac{1}{y}\}$.

(g) $\int_0^1 \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} (1-y^2)^{1/2} dy dx$

5. Cambiar el orden de integración en las siguientes integrales iteradas:

(a) $\int_0^a \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y) dx dy$

(b) $\int_0^a \int_{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{b} f(x,y) dy dx$

(c) $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z) dz dy dx$

(d) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z) dz dx dy$

6. *Diferenciación bajo el signo de la integral.* Sea $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $[a,b] \times [c,d]$. Definamos

$$F(y) = \int_a^b f(x,y) dx.$$

Probar que F es derivable y que

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

Indicación: Usando el Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que

$$F(u) = \int_a^b f(x,u)dx = \int_a^b (\int_c^u \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy + f(x,c))dx.$$

7. Sea $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con $\frac{\partial f}{\partial y}$ continua en $[a,b] \times [c,d]$. Definamos

$$F(x,y) = \int_a^x f(t,y)dt.$$

(a) Calcular $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$

(b) Si $G(x) = \int_a^{g(x)} f(t,x)dt$, calcular $G'(x)$.

8. Calcular las integrales siguientes

(a) $\int_D x^2 y dxdy$, siendo D el triángulo de vértices $(0,0), (0,1)$ y $(1,0)$.

(b) $\int_D y e^{-xy} dxdy$, siendo D el cuadrado de vértices $(0,0), (0,1), (1,0)$ y $(1,1)$.

(c) $\int_D x dxdy$, siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \sqrt{\pi}, 0 \leq y \leq \sin x^2\}$.

(d) $\int_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy$, siendo D el interior de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(e) $\int_D |\operatorname{máx}\{x,y\}| dxdy$, siendo $D = [-2,2] \times [-1,1]$.

9. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos medibles y acotados, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables. Definamos

$$F(x,y) = f(x) + g(y), \text{ y } G(x,y) = f(x)g(y).$$

Probar que F y G son integrables, y hallar $\int_{A\times B} F(x,y)dxdy$ y $\int_{A\times B} G(x,y)dxdy$ en función de $\int_A f$, $\int_B g$, $\mu(A)$ y $\mu(B)$.

10. Hallar el volumen de la región acotada por $z = x^2 + 3y^2$, $z = 9 - x^2$.

11. Hallar el volumen de la región acotada por $x^2 + 2y^2 = 2$, $z = 0$, $x + y + 2z = 2$.

12. Sea A la región de $\mathbb{R}^3$ acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$, con $x \geq 0$, $y \geq 0$. Calcular la integral $\int_A x dxdydz$.

13. Calcular la integral $\int_A y e^{-xy} dxdydz$, donde $A = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

14. Calcular el volumen del sólido acotado por el plano xz, el plano yz, el plano xy, los planos $x = 1$ e $y = 1$ y la superficie $z = x^2 + y^4$.

15. Calcular la integral $\int_A (xy)^2 \cos x^3 dxdy$, donde $A = [0,1] \times [0,1]$.

16. Calcular las siguientes integrales iteradas y dibujar las regiones A determinadas por los límites de integración:

(a) $\int_0^1 (\int_1^{e^x} (x+y)dy)dx$;

(b) $\int_0^1 (\int_{x^3}^{x^2} y dy)dx$.

17. Sea D la región acotada por los ejes positivos x e y y la recta $3x + 4y = 10$. Calcular $\int_D (x^2 + y^2)dxdy$.

18. Sea D la región dada como el conjunto de los (x, y) del plano tales que $-\varphi(x) \leq y \leq \varphi(x)$ y $a \leq x \leq b$, donde φ es una función continua no negativa en el intervalo $[a, b]$. Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en D tal que $f(x, y) = -f(x, -y)$ para todo $(x, y) \in D$. Probar que

$$\int_D f(x, y)dxdy = 0.$$

19. Dibujar la región correspondiente a cada una de las sigientes integrales dobles, cambiar el orden de integración y evaluar la integral usando el orden que sea más adecuado:

(a) $\int_0^1 (\int_x^1 xydy)dx$
(b) $\int_0^1 (\int_{2-y}^1 (x + y)^2 dx)dy$
(c) $\int_{-1}^1 (\int_{|y|}^1 (x + y)^2 dx)dy$

20. Calcular $\int_W x^2 \cos z dxdydz$, donde W es la región acotada por los planos $z = 0$, $z = \pi$, $y = 0$, $x = 0$ y $x + y = 1$.

21. Integrar $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ sobre la porción del primer octante $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, cortada por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

22. Utilizar integrales triples para hallar el volumen del sólido T de $\mathbb{R}^3$ limitado superiormente por el cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ e inferiormente por el paraboloide elíptico $z = x^2 + 3y^2$.

23. Sea A una región no acotada del plano que puede describirse como

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x < \infty,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

donde $\varphi, \psi : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas tales que $\varphi \leq \psi$. Sea f una función continua y no negativa sobre A. Probar que

$$\int_A f(x, y)dxdy = \int_a^\infty \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dydx.$$

Formular enunciados análogos para otro tipo de regiones no acotadas del plano y del espacio.

24. Calcular la integral $\int_A xye^{-(x^2+y^2)}dxdy$, donde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq 1\}$.

25. Usar el problema 23 para integrar e^{-xy} de dos maneras sobre la región $x \geq 0$, $1 \leq y \leq 2$. Concluir que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx = \log 2.$$