CÁLCULO INTEGRAL. HOJA 9.

EL TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLES.

1. Teorema (del cambio de variables). Sea $g : U \to V$ un difeomorfismo de clase C^1 entre dos abiertos de $\mathbb{R}^n$, sea $f : V \to \mathbb{R}$ medible. Entonces $f \circ g$ es medible (e integrable cuando f lo es), y

$$\int_V f(y)dy = \int_U f(g(x))\,|\det Dg(x)|dx.$$

(Al determinante $\det Dg(x)$ se la llama *jacobiano* de g en x.)

Para demostrar este teorema pueden seguirse estos pasos:
Paso 1. Si g es M-Lipschitz en un conjunto A, entonces $\mu(g(A)) \leq M^n\mu(A)$.
Paso 2. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es lineal, entonces $\mu(T(A)) = |\det T|\mu(A)$ (probarlo primero para transformaciones ortogonales (usando el paso anterior), después para autoadjuntas (y por tanto diagonalizables), y después usar que si T es no singular entonces T es composición de una autoadjunta con una ortogonal.
Paso 3. Probar que $A \subset U$ es medible si y sólo si $\varphi(A) \subset V$ es medible (usar el teorema de estructura de los conjuntos medibles y el hecho ya probado de que φ lleva conjuntos de medida cero en conjuntos de medida cero).
Paso 4. Probar que si $\varphi : U \to V$ (un difeomorfismo de clase C^1), $Q \subset U$ (un cubo de centro a), y $\varepsilon > 0$ son tales que $\|D\varphi(x) - D\varphi(a)\| \leq \varepsilon$ para todo $x \in Q$, entonces

$$\mu(\varphi(Q)) \leq \left(1 + \varepsilon\|D\varphi^{-1}(\varphi(a))\|\right)^n |\det D\varphi(a)|\mu(Q)$$

(para ello considerar la aplicación afín $\psi(y) = a + D\varphi^{-1}(\varphi(a))(y - \varphi(a))$, observar que $\|D(\psi \circ \varphi)(x)\| \leq \varepsilon\|D\varphi^{-1}(\varphi(a))\| + 1$ y aplicar el paso 1).
Paso 5. Probar que si $\varphi : U \to V$ es un difeomorfismo de clase C^1 y $A \subset U$ es un conjunto medible tal que $|\det D\varphi(x)| \leq C$ para todo $x \in A$, entonces $\mu(\varphi(A)) \leq C\mu(A)$ (a tal fin, suponer primero que A es abierto, y expresarlo como unión numerable de cubos diádicos disjuntos dos a dos cuyas adherencias están en A y con diámetro suficientemente pequeño para que en cada uno de ellos se tenga $\|D\varphi(x) - D\varphi(a)\| \leq \varepsilon$, aplicar el paso anterior y hacer $\varepsilon \to 0$. En el caso general aproximar $\mu(A)$ por $\mu(G)$ donde $G \supset A$ es abierto y $|\det D\varphi(x)\| < C + \varepsilon$ en G, tomar ínfimos en $G \supset A$, y hacer $\varepsilon \to 0$.)
Paso 6. Probar que si $\varphi : U \to V$ es un difeomorfismo de clase C^1 y $A \subset U$ es un conjunto medible entonces

$$\mu(\varphi(A)) = \int_A |\det D\varphi(x)|dx$$

(es decir, el enunciado del teorema con $f = 1$). Para ello, dados $0 < \alpha < \beta$, consideremos $B_{\alpha,\beta} := \{x \in A : \alpha \leq |\det D\varphi(x)| < \beta\}$, y aplicando el paso anterior a φ y φ^{-1}, comprobar que $\alpha\mu(B_{\alpha,\beta}) \leq \mu(\varphi(B_{\alpha,\beta})) \leq \beta\mu(B_{\alpha,\beta})$. Observar también que $\alpha\mu(B_{\alpha,\beta}) \leq \int_{B_{\alpha,\beta}} |\det D\varphi(x)|dx \leq \beta\mu(B_{\alpha,\beta})$, y por tanto

$$|\mu(\varphi(B_{\alpha,\beta})) - \int_{B_{\alpha,\beta}} |\det D\varphi(x)|dx| \leq (\beta - \alpha)\mu(B_{\alpha,\beta}).$$

Ahora, para cada $\delta > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, definir $A_k^\delta = A \cap B_{(k-1)\delta,k\delta}$ (de modo que $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k^\delta$, unión disjunta), y usar la desigualdad anterior para deducir que

$$|\mu(\varphi(A)) - \int_A |\det D\varphi(x)|dx| \leq \delta\mu(A),$$

lo que (haciendo $\delta \to 0$) concluye la demostración de este paso si $\mu(A) < +\infty$. Para el caso general, expresar A como unión creciente de conjuntos de medida finita, y usar el teorema de la convergencia monótona.

Paso 7. Demostrar el teorema para funciones simples medibles no negativas.

Paso 8. Usar el teorema de la convergencia monótona para concluir el resultado en el caso $f \geq 0$.

Paso 9. Demostrar el teorema para una función integrable cualquiera.

Veamos algunos ejemplos de cambios de variable que son muy usados en la práctica.

Coordenadas polares

Sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por

$$g(r, \theta) = (r \cos\theta, r\text{sen}\theta).$$

Aunque g es diferenciable de clase C^∞, no es inyectiva en todo $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, si la restringimos al abierto $U = \{(r, \theta) : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$ entonces sí que es inyectiva, y su jacobiano es

$$Jg(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\text{sen}^2\theta = r > 0$$

en todo este conjunto U, luego por el teorema de la función inversa $g : U \longrightarrow g(U)$ es un difeomorfismo de clase C^∞; se comprueba inmediatamente que $g(U) = \mathbb{R}^2 \setminus ([0, \infty) \times \{0\})$. Es decir, g transforma difeomórficamente la banda abierta U sobre todo el plano excepto los puntos de la recta $y = 0$ con coordenada x positiva. Como dichos puntos forman un subconjunto de medida cero de $\mathbb{R}^2$, estos puntos no afectan al valor de las integrales a las que se aplique el cambio de variables g y, para nuestros propósitos de cálculo de integrales, podemos actuar como si g fuera una biyección definida de la banda cerrada $\overline{U} = \{(r, \theta) : r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ sobre todo el plano $\mathbb{R}^2$.

De esta manera, si B es cualquier sunconjunto medible de $\mathbb{R}^2$, y $A = g^{-1}(B)$, al aplicar el teorema del cambio de variables a la transformación g se obtiene la siguiente fórmula:

$$\int_B f(x, y)dxdy = \int_A f(r\cos\theta, r\text{sen}\theta)rdrd\theta$$

Coordenadas esféricas

Sea ahora $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por

$$g(r, \varphi, \theta) = (r\,\text{sen}\varphi\cos\theta, r\,\text{sen}\varphi\text{sen}\theta, r\cos\varphi).$$

Como sucedía en el caso de las coordenadas polares, g es C^∞ pero no es inyectiva en todo $\mathbb{R}^3$. No obstante, restringiéndola al abierto $U = \{(r, \varphi, \theta) : r > 0, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \pi\}$, g sí es inyectiva, y su jacobiano es

$$Jg(r, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \text{sen}\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\text{sen}\varphi\text{sen}\theta \\ \text{sen}\varphi\text{sen}\theta & r\cos\varphi\text{sen}\theta & r\text{sen}\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\text{sen}\varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2\text{sen}\varphi > 0$$

en cada $(r, \varphi, \theta) \in U$, luego por el teorema de la función inversa $g : U \longrightarrow g(U)$ es un difeomorfismo de clase C^∞. Se ve fácilmente que $g(U) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : y = 0, x \geq 0\}$. Es decir, g transforma difeomórficamente la banda abierta U sobre todo el espacio $\mathbb{R}^3$ excepto los puntos del plano $y = 0$ con coordenada x positiva. Pero dichos puntos forman un subconjunto de medida

cero de $\mathbb{R}^3$, luego estos puntos no afectan al valor de las integrales a las que se aplique el cambio de variables g y, como en el caso de las coordenadas polares, para calcular integrales podemos hacer como si g fuera una biyección definida de $\overline{B} = \{(r, \varphi, \theta) : r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ sobre todo $\mathbb{R}^3$. En este caso, si B es cualquier sunconjunto medible de $\mathbb{R}^3$, y $A = g^{-1}(B)$, aplicando el teorema del cambio de variables a g, obtenemos la siguiente fórmula:

$$\int_B f(x, y, z)dxdydz = \int_A f(r\cos\theta \text{sen}\varphi, r\text{sen}\theta\text{sen}\varphi, r\cos\varphi)r^2\text{sen}\varphi drd\varphi d\theta.$$

Coordenadas cilíndricas

El cambio a coordenadas cilíndricas consiste en hacer un cambio a polares en las coordenadas x, y de cada punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, mientras que la coordenada z permanece fija. La transformación adecuada es pues

$$g(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\text{sen}\theta, z),$$

donde g está definida en el abierto $U = \{(r, \theta, z) : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$, y su imagen es todo $\mathbb{R}^3$ excepto los puntos del plano $y = 0$ con coordenada $x \geq 0$ (puntos que forman un subconjunto de medida cero de $\mathbb{R}^3$). El jacobiano de g es en este caso $Jg(r, \theta, z) = r > 0$ en U. Así, si B es cualquier sunconjunto medible de $\mathbb{R}^3$, y $A = g^{-1}(B)$, tenemos la siguiente fórmula de cambio de variables:

$$\int_B f(x, y)dxdydz = \int_A f(r\cos\theta, r\text{sen}\theta, z)rdrd\theta dz.$$

2. Determinar el área de la región acotada por las curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x^2$ e $y = 2x^2$, por medio del cambio de variables $u = xy$, $v = y/x^2$.

3. Hallar el volumen de la región determinada por la intersección del cono sólido $z^2 \geq x^2 + y^2$ y la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

4. Usar coordenadas cilíndricas para hallar el volumen del sólido T limitado superiormente por el plano $z = y$ e inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

5. Demostrar que el volumen de un cono circular de radio de la base r y altura h es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

6. Calcular

$$\int_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2} dxdydz,$$

donde D es la bola unidad de $\mathbb{R}^3$.

7. Utilizando coordenadas polares, calcular las integrales:

(a) $\int_D \sin(x^2 + y^2)dxdy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
(b) $\int_D |x + y|dxdy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
(c) $\int_D \log(x^2 + y^2)dxdy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x^2 + y^2 \leq b^2, x \geq 0, y \geq 0\}$.
(d) $\int_D (x^2 + y^2)^{-3}dxdy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$.

8. (a) Hallar el área limitada por las curvas en polares: $\rho = a\cos\theta$ y $\rho = a(1+\cos\theta)$; $(a > 0)$.
(b) Hallar el área limitada por la curva en polares: $\rho = a|\sin 3\theta|$; $(a > 0)$.
(c) Hallar el área limitada por la lemniscata: $(x^2 + y^2)^2 = 2a(x^2 - y^2)$; $(a > 0)$.

9. Se considera la transformación $\phi(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$; sea $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq u^2 + v^2 \leq 9, u \geq 0, v \geq 0\}$. Determinar el conjunto $\phi(D)$ y calcular su área.

10. Se considera la transformación $\phi(u,v) = (x = u + v, y = v - u^2)$; sea D el triángulo de vértices $(0,0), (2,0)$ y $(0,2)$ en el plano (u,v). Comprobar que ϕ es un cambio de variables alrededor de D. Determinar el conjunto $\phi(D)$ y calcular su área.

11. Utilizando cambios de variable, calcular:

(a) $\int_D (x^2 + y^2) dxdy$, siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9, 2 \leq xy \leq 4\}$.
(b) $\int_D \frac{x}{4x^2+y^2} dxdy$, siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq 4x^2 + y^2 \leq 16, x \geq 0, y \geq 0\}$.
(c) $\int_D (x^2 + y^2) dxdy$, siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \leq 1, |y| \geq 1\}$.

12. Calcular:

(a) $\int_V (x^2 + y^2) dxdydz$, donde $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2z \leq 4\}$.
(b) $\int_V z dxdydz$, donde $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.
(c) $\int_V z(x+y) dxdydz$, donde V está limitado por: $z = 0$, $z = a$, $xy = a^2$, $2(x+y) = 5a$, $(a > 0)$.
(d) $\int_V e^x dxdydz$, donde $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
(f) $\int_V |z| dxdydz$, donde $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z^2 \leq x^2\}$.
(g) $\int_V (x^2 + y^2 + z^2)^{-2} dxdydz$, donde $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}$.

13. Calcular el volumen de los cuerpos siguientes:

(a) El cuerpo limitado por los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + z^2 = 1$.
(b) El cuerpo limitado por la superficie $z = x^2 + y^2$ y los planos $z = 2$ y $z = 4$.
(c) El cuerpo limitado por una esfera de radio R y un cono de ángulo en el origen 2α, si el vértice del cono está en el centro de la esfera.
(d) El cuerpo limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cilindro $(x - a/2)^2 + y^2 = a^2/4$.
(e) El cuerpo limitado por las superficies $x + y = z$; $xy = 1$, $y = x$, $y = 2x$, $z = 0$.

14. Calcular, mediante una transformación previa de coordenadas, las integrales:

(a) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2} dzdydx$ (a cilíndricas).
(b) $\int_0^{2R} \int_{-\sqrt{2Rx-x^2}}^{\sqrt{2Rx-x^2}} \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) dzdydx$ (a esféricas).

15. Hacer un cambio de variables a coordenadas polares para calcular $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$. Después, utilizar el teorema de Fubini para probar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

16. ¿Para qué valores de p es la función

$$f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^p$$

integrable sobre B, donde B es la bola unidad euclidea de $\mathbb{R}^3$? ¿Para cuáles lo es sobre $\mathbb{R}^3 \setminus B$?

17. Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ la bola unidad abierta en el plano. Hallar el valor de las siguientes integrales:

(a) $\int_A \left[1 - \sqrt{x^2+y^2}\right]^p dxdy$, para $p < -1$.

(b) $\int_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$.

18. Deducir fórmulas para el volumen de cuerpos de revolución en $\mathbb{R}^3$. Después calcular el volumen del toro engendrado al girar una circunferencia de radio r y centro $(a, 0, 0)$ situada en el plano $y = 0$ alrededor del eje z (se supone $0 < r < a$).