es claramente posible (fig. 1-23) si *existe una recta* E *en el plano tal que la distancia* $\varrho(t)$ *de* $\alpha(t)$ *a esta recta es una función con un número finito de puntos críticos* (un punto crítico es aquel donde $\varrho'(t) = 0$). La última afirmación es cierta, pero no vamos a entrar en su demostración. Mencionaremos, sin embargo, que la ecuación (1) puede obtenerse por medio del teorema de Stokes (de Green) en el plano (véase el ejercicio 15).

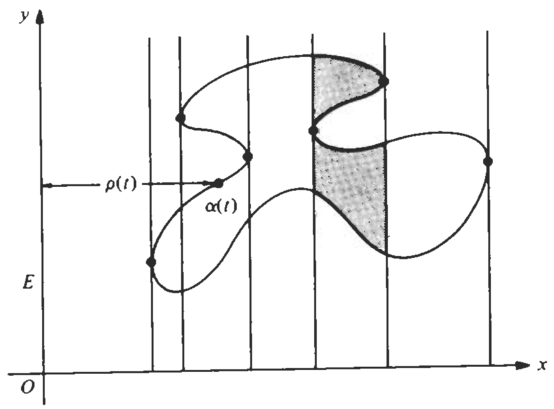

Figura 1-23

TEOREMA 1 (La desigualdad isoperimétrica). *Sea* C *una curva cerrada, simple y plana de longitud* l, y sea A *el área de la región encerrada por* C. *Entonces*

$$l^2 - 4\pi A \geq 0, \tag{2}$$

y la igualdad se da si y solamente si C *es un círculo.*

Demostración. Sean E y E' dos rectas paralelas que no cortan a la curva cerrada C y desplacémoslas hasta que corten a C por primera vez. Obtenemos así dos tangentes paralelas a C, L y L', de forma que la curva está enteramente contenida en la banda delimitada por L y L'. Considérese un círculo S^1 que es tangente a L y L' y no corta a C. Sea O el centro de S^1 y tómese el sistema de coordenadas con origen en O y de eje x perpendicular a L y L' (fig. 1-24). Parametricemos C por la longitud de arco, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, de forma que esté orientada positivamente y que los puntos de tangencia con L y L' sean $s = 0$ y $s = s_1$, respectivamente.

Podemos suponer que la ecuación de S^1 es

$$\bar{\alpha}(s) = (\bar{x}(s), \bar{y}(s)) = (x(s), \bar{y}(s)), \ s \in [0, l]$$

donde $2r$ es la distancia entre L y L'. Usando la ecuación (1) y denotando por $\bar{A}$ el área encerrada por S^1, tenemos

$$A = \int_0^l xy'\,ds, \qquad \bar{A} = \pi r^2 = -\int_0^l \bar{y}x'\,ds.$$

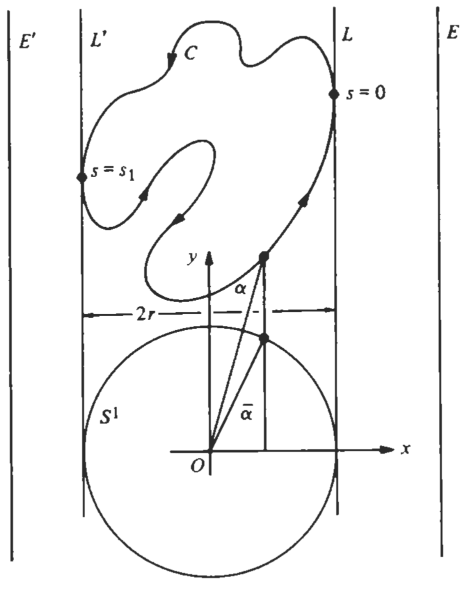

Figura 1-24

Así,

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &= \int_0^l (xy' - \bar{y}x')\,ds \leq \int_0^l \sqrt{(xy' - \bar{y}x')^2}\,ds \\ &\leq \int_0^l \sqrt{(x^2 + \bar{y}^2)((x')^2 + (y')^2)}\,ds = \int_0^l \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}\,ds \\ &= lr. \end{aligned} \tag{3}$$

Recordemos ahora que la media geométrica de dos números positivos es menor o igual que su media aritmética y que la igualdad se da si y sólo si éstos son iguales. Se deduce que

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} \leq \tfrac{1}{2}(A + \pi r^2) \leq \tfrac{1}{2}lr. \tag{4}$$

Por tanto, $4\pi A r^2 \leq l^2 r^2$, y esto da la ecuación (2).

Supongamos ahora que se da la igualdad en la ecuación (2). Entonces deben darse las igualdades en las ecuaciones (3) y (4). De la igualdad en la ecuación (4) se sigue que $A = \pi r^2$. Así, $l = 2\pi r$ y r no depende de la elección de la dirección de L. Más aún, la igualdad en la ecuación (3) implica que

$$(xy' - \bar{y}x')^2 = (x^2 + \bar{y}^2)((x')^2 + (y')^2)$$

o

$$(xx' + \bar{y}y')^2 = 0;$$

o sea,

$$\frac{x}{y'} = \frac{\bar{y}}{x'} = \frac{\sqrt{x^2 + \bar{y}^2}}{\sqrt{(y')^2 + (x')^2}} = \pm r.$$

Por tanto, $x = \pm ry'$. Como r no depende de la elección de la dirección de L, podemos intercambiar x e y en la última relación y obtener $y = \pm rx'$. Así,

$$x^2 + y^2 = r^2((x')^2 + (y')^2) = r^2$$

y C es un círculo, como queríamos demostrar. **Q.E.D.**

Observación 1. Se comprueba fácilmente que la demostración de arriba puede aplicarse a *curvas* C^1, o sea, curvas $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, a las que solamente pedimos que las funciones $x(t)$, $y(t)$ tengan derivadas primeras continuas (que, por supuesto, coincidan en a y b si la curva es cerrada).

Observación 2. La desigualdad isoperimétrica es válida para una amplia clase de curvas. Se han encontrado demostraciones directas que funcionan siempre y cuando se puedan definir la longitud de arco y el área para las curvas a considerar. Para las aplicaciones, es conveniente señalar que el teorema es válido para *curvas* C^1 *a trozos*, es decir, curvas continuas que están formadas por un número finito de arcos C^1. Estas curvas pueden tener un número finito de esquinas, donde la tangente es discontinua (fig. 1-25).

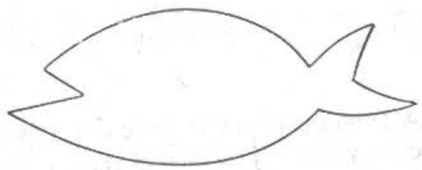

Figura 1-25. *Una curva* C^1 *a trozos.*

B. *El teorema de los cuatro vértices*

Necesitaremos algunos resultados generales más sobre curvas cerradas planas.

Sea α: $[0, l] \to R^2$ una curva cerrada plana dada por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$. Como s es la longitud de arco, el vector tangente $t(s) = (x'(s), y'(s))$ tiene longitud uno. Es conveniente introducir la *indicatriz tangente* t: $[0, l] \to R^2$ que viene dada por $t(s) = (x'(s), y'(s))$; es ésta una curva diferenciable, cuya traza está contenida en el círculo de radio 1 (fig. 1-26). Obsérvese que el vector velocidad de la indicatriz tangente es

$$\frac{dt}{ds} = (x''(s), y''(s)) = \alpha''(s) = kn,$$