ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. HOJA 3.

TEOREMA DE PEANO. PROLONGABILIDAD DE SOLUCIONES.

Existencia de soluciones para ecuaciones continuas.

1. Teorema (Cauchy-Peano). Supongamos que $f \in C([t_0, t_0+T]\times\overline{B}(x_0,\delta), \mathbb{R}^n)$, y denotemos su máximo en este compacto por M. Entonces existe al menos una solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida en el intervalo $[t_0, t_0 + T_0]$, donde $T_0 = \min\{T, \delta/M\}$. (Análogamente para el intervalo $[t_0 - T_0, t_0]$.)

2. Corolario. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}^n$ continua. Dados $x_0 \in U$ y $\delta > 0$ tal que

$$0 < \delta < \operatorname{dist}(x_0, \partial U),$$

existe al menos una solución $x : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \overline{B}(x_0, \delta)$ del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

en donde

$$\alpha := \frac{\delta}{M}, \quad M := \max_{x \in B(x_0,\delta)} \|f(x)\|.$$

Prolongabilidad de soluciones

En lo que sigue, supondremos, por simplificar la notación, que $t_0 = 0$ y que nuestra ecuación $(*)$ es autónoma, es decir, consideraremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{$\sharp$}$$

Esto no supone ninguna restricción pues, en primer lugar, $y(t)$ es solución de $(\sharp)$ si y sólo si $x(t) = y(t - t_0)$ es solución de $(*)$; y, en segundo lugar, el sistema $(*)$ (en $\mathbb{R}^n$, no autónomo) es equivalente al siguiente sistema (autónomo, en $\mathbb{R}^{n+1}$):

$$\begin{cases} (s'(t), x'(t)) = (1, f(s(t), x(t))) \\ (s(0), x(0)) = (0, x_0) \end{cases}$$

También supondremos que $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz, de modo que puede aplicarse el teorema de Peano para asegurar la existencia de una solución en el intervalo $[-\alpha, \alpha]$

(con la notación del Corolario 9), y el teorema de Picard-Lindelöf para asegurar la unicidad local de las soluciones y por tanto también que la solución es única en dicho intervalo.

Es fácil dar ejemplos que muestran que el intervalo de definición $[-\alpha, \alpha]$ de una solución x de ($\sharp$) que proporciona el teorema de Peano no es óptimo: puede ocurrir que exista una solución $\tilde{x}$ de ($\sharp$) definida en un intervalo mayor.

Sin embargo, la unicidad local de las soluciones nos garantiza que $x = \tilde{x}$ en su intervalo común de definición: decimos entonces que $\tilde{x}(t)$ *prolonga* a $x(t)$.

3. Notación. En lo que sigue I_{x_0} denotará la unión de todos los intervalos I tales que $0 \in I$ y existe una solución $x_I : I \to U$ de ($\sharp$).

4. Proposición. I_{x_0} es un intervalo abierto y existe una única solución x de ($\sharp$) definida sobre I_{x_0}. Más aún, I_{x_0} es el mayor intervalo de $\mathbb{R}$ sobre el que puede definirse una solución de ($\sharp$). (A x se le llama solución maximal de ($\sharp$).)

Es conveniente observar que el intervalo I_{x_0} depende fuertemente del dominio U de definición de f que se esté considerando.

5. Proposición. Sea $x : I_{x_0} = (\tau_-, \tau_+) \to U \subset \mathbb{R}^n$ la solución maximal de ($\sharp$). Supongamos que $\partial U \neq \emptyset$, que $\tau_+ < +\infty$, y que $x(t)$ está acotada en $[0, \tau_+)$. Entonces

$$\lim_{t \to \tau_+} \operatorname{dist}(x(t), \partial U) = 0,$$

es decir $x(t)$ se acerca a la frontera de U cuando t tiende a τ_+.

Por otra parte, si $U = \mathbb{R}^n$ y $\tau_+ < +\infty$, entonces $\lim_{t \to \tau_+} \|x(t)\| = \infty$.

(Y análogamente cuando $\tau_- > -\infty$.)

Demostración: supongamos que existieran δ y $t_n \nearrow \tau_+$ tales que $\operatorname{dist}(x(t_n), \partial U) \geq 2\delta > 0$. Sea y_k la solución del problema $y' = f(y)$, $y(t_k) = x(t_k)$, definida en $[t_k - \alpha_k, t_k + \alpha_k]$, con $\alpha_k = \delta / \max_{x \in \overline{B}(x(t_k), \delta)} \|f(x)\|$. Definir $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \overline{B}(x(t_k), \delta)$, comprobar que es acotado, que $\overline{\Omega} \subset U$, y que

$$0 < \alpha := \frac{\delta}{\max_{x \in \overline{\Omega}} \|f(x)\|} \leq \alpha_k.$$

Concluir que las y_k están definidas en intervalos de longitud por lo menos 2α, que $x(t) = y_k(t)$ para $t \in [t_k - \alpha, t_k + \alpha] \cap I_{x_0}$, y llegar a contradecir la maximalidad de x.

6. Observación. Con la notación de la proposición anterior, si $\tau_+ < +\infty$ entonces todo $z \in \mathbb{R}^n$ obtenido como un límite $z = \lim_{n \to \infty} x(t_n)$ con $\lim_{n \to \infty} t_n = \tau_+$ es necesariamente un punto de ∂U.

7. Corolario. Con la notación de la proposición anterior, si $\tau_+ < +\infty$, entonces la solución maximal x de ($\sharp$) debe salirse (cuando $t \to \tau_+$) de cualquier compacto $K \subset U$.

8. Corolario. Supongamos $U = \mathbb{R}^n$. Si $x(t)$ es solución maximal acotada de ($\sharp$) entonces $I_{x_0} = \mathbb{R}$.

9. Teorema (desigualdad de Gronwall, versión 3). Sea $g(t)$ una función definida en $\mathbb{R}$, localmente Lipschitz, y sea $\rho(t)$ la única solución (que suponemos definida en $[t_0, t_1]$) del p.v.i.

$$\begin{cases} \rho'(t) = g(\rho(t)) \\ \rho(t_0) = \rho_0. \end{cases}$$

Supongamos que $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ satisface

$$\|x'(t)\| \leq g(\|x(t)\|), \ \|x(t_0)\| \leq \rho_0.$$

Entonces se tiene

$$\|x(t)\| \leq \rho(t)$$

para todo $t \in [t_0, t_1]$.

10. Corolario. Si $\|f(x)\| \leq g(\|x\|)$ y las soluciones de la ecuación diferencial $\rho' = g(\rho)$ están definidas en todo $\mathbb{R}$, entonces las soluciones de $x' = f(x)$ también están definidas en todo $\mathbb{R}$.