EXAMEN DE CÁLCULO INTEGRAL, GRUPO C.

PARTE 2. 4 DE JULIO DE 2006

1. Calcular la integral de línea

$$\int_C (2x\operatorname{sen}^2 y + y^2\cos x + yz^2)dx + (2x^2\operatorname{sen} y\cos y + 2y\operatorname{sen} x + y + xz^2)dy + 2xyzdz$$

donde C es la elipse que resulta de cortar el elipsoide $2x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 7$ con el plano $11x - 13y + 17z = 0$.

2. Consideremos las superficies

$$S_1 = \{(x,y,z) \,:\, x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ 0 \le z \le 2\},$$

$$S_2 = \{(x,y,z) \,:\, z = e^{-x^2-y^2} + 2 - e^{-5},\ x^2 + y^2 \le 5\},$$

$$S_3 = \{(x,y,z) \,:\, z = 0, x^2 + y^2 \le 1\}.$$

Definamos $S = S_1 \cup S_2$, y sea V el sólido de $\mathbb{R}^3$ limitado por $S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

1. Hallar el área de $\partial V \setminus S_2$.
2. Hallar el volumen de V.
3. Calcular

$$\int_S F \cdot dS,$$

donde $F(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$.

3. Sea (D_n) una sucesión de conjuntos compactos y con área del plano $\mathbb{R}^2$, sea D otro compacto con área de $\mathbb{R}^2$, y supongamos que:

1. $D_n \subseteq D_{n+1} \subseteq D$ para todo n, y
2. Para todo abierto U tal que $\operatorname{dist}(U,\ \mathbb{R}^2 \setminus D) > 0$, existe n tal que $D_n \supset U$.

Probar que

$$\lim_{n\to\infty} a(D_n) = a(D).$$

Observación: Esta segunda parte del examen representa 5 de los 10 puntos posibles. La primera pregunta vale un punto, la segunda tres, y la tercera uno.