EXAMEN DE CÁLCULO INTEGRAL, GRUPO E+F.

PARTE 2. 3 DE JULIO DE 2007

1. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le xy \le 2,\ x \le y \le 3x\}$, y sea $f : D \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2, & \text{si } y \neq 2x; \\ 0, & \text{si } y = 2x. \end{cases}$$

Demostrar que f es integrable en D, y calcular $\int_D f$.

2. Calcular el área de la superficie S de $\mathbb{R}^3$ definida por las ecuaciones $y = zx$, $x^2 + z^2 \le 1$.

3. Sea F el campo vectorial definido por

$$F(x,y,z) = \left(xy - y \operatorname{sen} z,\ y + xe^z,\ -zy + \cos(xy)\right).$$

Suponiendo que la densidad media del cuerpo humano es de $950\,\mathrm{Kg/m^3}$, estima el valor de la integral del campo F sobre la superficie de tu cuerpo. [1]

4. Sea T un toro en $\mathbb{R}^3$, y V la región interior a T. Sea u una función de clase C^2 en $\mathbb{R}^3$ con la propiedad de que $u = 0$ en T. Demostrar que

$$\int_V u \Delta u + \int_V \|\nabla u\|^2 = 0,$$

donde $\Delta u := \text{traza}\,(D^2 u) = \text{div}\,(\nabla u)$.

Observación: Esta segunda parte del examen representa 5 de los 10 puntos posibles. La primera pregunta vale dos puntos, y el resto uno cada una.

[1] Entenderemos que el origen de coordenadas se encuentra en el ángulo superior izquierdo de la pizarra. Los datos biométricos personales utilizados para contestar a esta pregunta serán tratados de manera absolutamente confidencial. El titular de los datos podrá ejercitar su derecho de cancelación o rectificación mediante escrito dirigido al profesor.