EXAMEN DE CÁLCULO INTEGRAL, GRUPO C.

PARTE 2. 6 DE SEPTIEMBRE DE 2006

1. Calcular la integral de línea

$$\int_C 4y^3dx - x^3dy$$

donde C es la curva cerrada simple que limita el recinto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + 4y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, orientada positivamente.

2. Consideremos las superficies

$$S_1 = \{(x,y,z) \,:\, x^2 - y^2 + 4z^2 = 1,\, 0 \leq y \leq 2\},$$

$$S_2 = \{(x,y,z) \,:\, x^2 + (y-2)^2 + 4z^2 = 5,\, y \geq 2\},$$

$$S_3 = \{(x,y,z) \,:\, y = 0, x^2 + 4z^2 \leq 1\}.$$

Definamos $S = S_1 \cup S_2$, y sea V el sólido de $\mathbb{R}^3$ limitado por $S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

1. Calcular el área de ∂V.
2. Calcular el volumen de V.
3. Calcular

   $$\int_S F \cdot dS,$$

   donde $F(x,y,z) = (x,y,z)$.

3. Sea M una superficie compacta, conexa y sin borde en $\mathbb{R}^3$. Consideremos el campo vectorial $F(x,y,z) = (x,y,z)$, y definamos

$$R = \sup_{p \in M} \|F(p)\|.$$

Supongamos que se tiene

$$\int_M F \cdot dS = R \text{ área}(M).$$

Demostrar que M es la esfera de centro 0 y radio R.

(Y de paso, si has hecho la primera parte de sólo problemas, utiliza el resultado para contestar concluyentemente la última pregunta del primer problema.)

Observación: Esta segunda parte del examen representa 5 de los 10 puntos posibles. La segunda pregunta vale tres puntos, y las restantes uno cada una.