EXAMEN DE CÁLCULO INTEGRAL, GRUPOS E+F.

1 DE JULIO DE 2008

1. Calcular el área de la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ definida por $x = 1 + zy$, $z^2 + y^2 \leq 1$.

2. Calcular la integral

$$\int_C -4x^2 y dx + xy^2 dy,$$

donde C es la elipse de ecuación $4x^2 + y^2 = 1$, recorrida dos veces en sentido positivo.

3. Sea F el campo vectorial definido por

$$F(x, y, z) = (2x - y \operatorname{sen} z,\ 3y + xe^z,\ \cos(xy)),$$

y sea S la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio un googolplex en $\mathbb{R}^3$. Calcular $\int_S F$.

4. Sea D el subconjunto acotado del primer cuadrante ($x \geq 0, y \geq 0$) del plano $\mathbb{R}^2$ que delimitan las rectas $3y = x$, $y = 5x$, y las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 2$. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \log\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } y \notin \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } y \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Estudiar si f es integrable en D, y en su caso hacer un cambio de variables apropiado para calcular $\int_D f$.

5. Sea $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{1 + P(x)^2}\right)^n dx = 0.$$

Más en general, si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es una función medible, calcular el valor de

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{1 + f(x)^2}\right)^n dx$$

en términos de la medida del conjunto de ceros de f.

6. Sea $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ una curva de clase C^1 a trozos, y sea $\gamma_n : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ una sucesión de curvas de clase C^1 a trozos con longitud menor o igual que 100 y tales que

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n'(t) = \gamma'(t)$$

para casi todo t. Probar que la sucesión de las longitudes de γ_n converge a la longitud de γ.

¿Es necesario que la sucesion de las longitudes de γ_n esté acotada? ¿Sería suficiente que $\|\gamma_n(t) - \gamma(t)\| \to 0$ uniformemente en $[0, 1]$?

7. Definimos la longitud de un subconjunto C de una recta $R = \{p + tv : t \in \mathbb{R}\}$, donde $v, p \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| = 1$, como

$$\ell(C) = \int_{\{t \in \mathbb{R} \,:\, p+tv \in C\}} 1 dt.$$

(esto equivale a hacer un cambio de coordenadas isométrico de modo que R coincida con el eje x e integrar en $\mathbb{R}$ la función característica del conjunto C visto como subconjunto de $\mathbb{R}$).

Sean A y B compactos del plano $\mathbb{R}^2$. Estudiar la veracidad de las siguientes afirmaciones, demostrándolas o refutándolas en cada caso.

1. Si para cada recta R que pasa por el origen el conjunto $A \cap R$ tiene longitud menor o igual que $B \cap R$, entonces la medida de A es menor o igual que la de B.
2. Si para cada $v \in \mathbb{R}^2$ con $\|v\| = 1$ se tiene que

$$\int_{A_v} t dt \leq \int_{B_v} t dt,$$

donde $A_v = \{t \in [0, +\infty) : tv \in A\}$ y $B_v = \{t \in [0, +\infty) : tv \in B\}$, entonces la medida de A es menor o igual que la de B.