# EXAMEN DE CÁLCULO INTEGRAL, GRUPO E.

30 DE JUNIO DE 2009

**1.** Calcular el volumen del sólido $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2+y^2+z^2 \leq 1, z \leq -(x-1)^2-y^2\}$.

**2.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrable, y sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua tal que $g(x, y) = 0$ si $x^2 + y^2 \geq 20$. Probar que

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)g(t + x, t + y)dxdy = 0.$$

**3.** Sea $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ una función decreciente de clase $C^1$. Consideremos la superficie $S$ obtenida al rotar en el espacio $\mathbb{R}^3$ la gráfica de $z = f(y)$ alrededor del eje de las $y$, es decir $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + z^2 = f(y)^2,\, y > 0\}$.

1. Demostrar que $S \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 0, x \geq 0\}$ es una superficie paramétrica simple, hallando una parametrización adecuada. Calcular el área de $S$ en función de $f$.
2. Dar un ejemplo de $f$ tal que el área de $S$ sea infinita pero el volumen del sólido $V$ limitado por $S$ y el plano $y = 0$ sea finito.
3. Dar un ejemplo de $f$ tal que el área de $S$ sea finita.
4. Demostrar que si el área de $S$ es finita entonces el volumen de $V$ es también finito.

Los valores de las preguntas son: 1) = 2 puntos; 2) = 2 puntos; 3) = 3 puntos (esta parte del examen se puntúa sobre 7).