EXAMEN DE CÁLCULO INTEGRAL, GRUPO E.

30 DE JUNIO DE 2009

Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Si $\mu_{\mathbb{R}^n}(A) > 0$ entonces A tiene interior no vacío.

2. Si $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ es Lipschitz y $\mu_{\mathbb{R}^5}(A) = 0$ entonces $\mu_{\mathbb{R}^3}(f(A)) = 0$.

3. Si $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ es de clase C^1 y $\mu_{\mathbb{R}^6}(A) = 0$ entonces $\mu_{\mathbb{R}^6}(f(A)) = 0$.

4. Si $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones medibles y para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ existe $\lim_{k\to\infty} f_k(x, y)$ entonces la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y) = \begin{cases} \lim_{k\to\infty} f_k(x, y) & \text{si } x^2 + y^2 > 1, \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

es medible.

5. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es integrable, y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua y tal que $g(x, y) = 0$ si $x^2 + y^2 \geq 20$, entonces

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)g(t + x, t + y)dxdy = 0.$$

6. Sea $F = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1, y supongamos que $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$. Entonces existe $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla f$.

7. Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es medible entonces la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = f(x, y, 14)$ es medible.

8. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 y tal que $\mathrm{rot}F \neq 0$. Entonces existe un camino cerrado $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ tal que $\int_\gamma F \neq 0$.

9. Sea V la región interior a un toro en $\mathbb{R}^3$. Supongamos que $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo de clase C^1 tal que $\mathrm{div}F$ no cambia de signo en V y no es idénticamente nula. Entonces $\int_{\partial V} F \neq 0$.

10. Si $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal entonces $\mu(L([0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1])) = \det L$.

Esto es un test que supone 3 puntos de la nota del examen. Cada pregunta acertada suma 0,3 puntos, y cada pregunta fallada resta 0,15. Las preguntas no respondidas ni suman ni restan puntos.