EXAMEN DE CÁLCULO INTEGRAL, GRUPO C.

PARTE 1. EXAMEN SÓLO DE PROBLEMAS 4 DE JULIO DE 2006

1. Definimos la longitud de un subconjunto C de una recta $R = \{p + tv : t \in \mathbb{R}\}$, donde $v, p \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| = 1$, como

$$\ell(C) = \int_{\{t\in\mathbb{R}\,:\,p+tv\in C\}} 1dt.$$

(esto equivale a hacer un cambio de coordenadas isométrico de modo que R coincida con el eje x e integrar en $\mathbb{R}$ la función característica del conjunto C visto como subconjunto de $\mathbb{R}$).

Sean A y B compactos con área del plano $\mathbb{R}^2$, y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, números que no se anulan simultáneamente. Estudiar la veracidad de las siguientes afirmaciones, demostrándolas o refutándolas en cada caso.

1. Si para cada $t \in \mathbb{R}$ se tiene que la intersección de A con la recta $\alpha x + \beta y = t$ tiene longitud menor o igual que la intersección de B con la misma recta, entonces el área de A es menor o igual que la de B.
   Indicación: considerar primero el caso $\alpha = 0$.
2. Si para cada recta R que pasa por el origen el conjunto $A \cap R$ tiene longitud menor o igual que $B \cap R$, entonces el área de A es menor o igual que la de B.
3. Si para cada $v \in \mathbb{R}^2$ con $\|v\| = 1$ se tiene que

$$\int_{A_v} tdt \leq \int_{B_v} tdt,$$

   donde $A_v = \{t \in [0, +\infty) : tv \in A\}$ y $B_v = \{t \in [0, +\infty) : tv \in B\}$, entonces el área de A es menor o igual que la de B.

2. Sean C_1 la circunferencia definida por $x^2 + y^2 = 9$, y C_2 el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$. Se consideran ambas curvas orientadas positivamente. Calcular el valor de

$$\int_{C_1} -yx^2dx + xy^2dy - \int_{C_2} -yx^2dx + xy^2dy.$$

3. Sea $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1, \quad \text{si } x^2 + z^2 = 1/n^2 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}; \\ \cos(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \text{en otro caso;} \end{cases}$$

donde $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$. Decidir si f es integrable, y calcular $\int_B f$ si existe.

Observación: Esta primera parte del examen representa 5 de los 10 puntos posibles. La primera pregunta vale 3 puntos, el resto un punto cada una.