EXAMEN DE CÁLCULO INTEGRAL, GRUPO E+F.

PARTE 1. EXAMEN SÓLO DE PROBLEMAS. 3 DE JULIO DE 2006

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, y sea φ_k una sucesión de funciones de clase C^∞ tales que

- $\varphi_k \geq 0$;
- $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)dx = 1$;
- $\varphi_k(x) = 0$ si $\|x\| \geq \frac{1}{k}$. [1]

Definamos $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$f_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(x-y)dy.$$

Demostrar que:

(1.1) f_k es C^∞, y calcular ∇f_k (en función de $\nabla \varphi_k$).

(1.3) f_k converge uniformemente a f en cada acotado de $\mathbb{R}^n$.

2. Sea F el campo vectorial definido por

$$F(x,y,z) = (yz\cos(xyz), xz\cos(xyz), xy\cos(xyz)),$$

y $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ la curva definida por

$$\gamma(t) = \left(\frac{t^2}{2}, t^3, \pi t^5\right).$$

Calcular $\int_\gamma F$.

3. Sea γ una curva que recorre el borde del triángulo de vértices $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,0)$ en el sentido de las agujas del reloj, y sea

$$F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Calcular $\int_\gamma F$.

Observación: Esta primera parte del examen representa 5 de los 10 puntos posibles. La primera pregunta vale 3 puntos, el resto un punto cada una.

[1] Por ejemplo, no es difícil ver que la sucesión de funciones $\varphi_k(x) = k^n\varphi(kx)/\int_{\mathbb{R}^n}\varphi$, donde

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}}, & \text{si } \|x\| < 1; \\ 0, & \text{si } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

cumple estas tres propiedades, aunque no se pide comprobar esto.