EXAMEN DE CÁLCULO INTEGRAL, GRUPO C.

PARTE 1. EXAMEN SÓLO DE PROBLEMAS 6 DE SEPTIEMBRE DE 2006

1. Sea V un sólido de $\mathbb{R}^3$ con frontera ∂V, una superficie compacta, conexa y sin borde. Demostrar que

$$6\,\mathrm{vol}(V) \leq \mathrm{diam}(V)\,\text{área}(\partial V).$$

¿Cuándo crees que se da la igualdad?

Indicación: El diámetro de V se define como $\mathrm{diam}(V) = \sup\{\|x-y\| : x, y \in V\}$. En nuestro caso existen x_0, y_0 en los que este supremo se alcanza. Puede suponerse entonces, sin perder generalidad, que 0 está en el punto medio del segmento $[x_0, y_0]$, y aplicar el teorema de la divergencia de Gauss a un campo F adecuado.

2. Sea B el subconjunto acotado del primer cuadrante ($x \geq 0$, $y \geq 0$) del plano $\mathbb{R}^2$ que delimitan las rectas $x = y$, $x = 4y$, y las hipérbolas $xy = 8$, $xy = 12$. Calcular la integral

$$\int_B \log\left(\frac{x}{y}\right) dxdy.$$

3. Sea $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x^2+y^2+z^2)^{3/2}, & \text{cuando } 2x^2+3y^2+5z^2 = 1/n^2 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}; \\ \cos(x^2+y^2+z^2)^{3/2}, & \text{cuando no;} \end{cases}$$

donde $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4, z \geq 0\}$. Decidir si f es integrable, y calcular la integral $\int_B f$ si existe.

Observación: Esta primera parte del examen representa 5 de los 10 puntos posibles. La primera pregunta vale 3 puntos, el resto un punto cada una.