

EXAMEN DE CÁLCULO INTEGRAL, GRUPO C.

PARTE 1. EXAMEN CON TEORÍA. 6 DE SEPTIEMBRE DE 2006

1. Enunciar y demostrar el teorema de Fubini en \mathbb{R}^2 .

2. Sea B el subconjunto acotado del primer cuadrante ($x \geq 0, y \geq 0$) del plano \mathbb{R}^2 que delimitan las rectas $x = y$, $x = 4y$, y las hipérbolas $xy = 8$, $xy = 12$. Calcular la integral

$$\int_B \log\left(\frac{x}{y}\right) dx dy.$$

3. Sea $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}, & \text{cuando } 2x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 1/n^2 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}; \\ \cos(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}, & \text{cuando no;} \end{cases}$$

donde $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$. Decidir si f es integrable, y calcular la integral $\int_B f$ si existe.

Observación: Esta primera parte del examen representa 5 de los 10 puntos posibles. La primera pregunta vale 3 puntos, el resto un punto cada una.