HOJA 1. PRÁCTICAS DE CÁLCULO INTEGRAL

GRUPO E+F, CURSO 2006-2007

1. Dadas dos particiones cualesquiera P_1, P_2 de un rectángulo R, siempre existe una partición P de R tal que P es más fina que P_1 y que P_2.

2. Sea P una partición de un intervalo $[a, b]$. Dado $\varepsilon > 0$, probar que existe $\delta > 0$ tal que si P' es cualquier partición de $[a, b]$ en subintervalos cuyas longitudes son menores o iguales que δ, entonces la suma de las longitudes de los subintervalos de P' que no están contenidos en algún subintervalo de P es menor o igual que ε.

Indicación: Tomar $\delta = \varepsilon/N$, donde N es el número de puntos de la partición P.

3. Más en general, probar que, dados un rectángulo R de $\mathbb{R}^n$, una partición P de R y $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si P' es cualquier partición de R en subrectángulos cuyos lados son menores o iguales que δ, entonces la suma de los volúmenes de los subrectángulos de P' que no están contenidos en algún subrectángulo de P es menor o igual que ε.

Indicación: Tomar $\delta = \varepsilon/T$, donde T es la suma total de las *áreas* de las caras de todos los subrectángulos de la partición P.

4. Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables. Supongamos que $f \geq g$ sobre A. Probar que entonces

$$\int_A f \geq \int_A g.$$

5. En particular, si A es un rectángulo y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable y está acotada superiormente por M e inferiormente por m, entonces

$$mv(A) \leq \int_A f \leq Mv(A).$$

6. Probar el siguiente teorema del valor medio integral: Si A es un rectángulo y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, existe $x_0 \in A$ tal que

$$\int_A f = f(x_0)v(A).$$

Indicación: Por el problema anterior, $f(x_1)v(A) \leq \int_A f \leq f(x_2)v(A)$, donde $f(x_1)$ y $f(x_2)$ son el mínimo y máximo absolutos de f sobre A. Utilizar entonces que f es continua y A es conexo.

7. Sean A un rectángulo de $\mathbb{R}^n$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Probar que f es integrable en A.

Indicación: Al ser f continua, alcanza su máximo y mínimo sobre cada subrectángulo de una partición; además, puesto que A es compacto, f es uniformemente continua sobre A. Combinar estos dos hechos con el criterio de integrabilidad de Riemann para deducir el resultado.

8. Sean A un rectángulo, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que es constante salvo quizás en una cantidad finita de puntos. Probar que f es integrable en A, y decir cuál es su integral.

9. Sea $f(x) = 1$ para todo $x \in A$. ¿Qué debería ser $\int_A f$?

10. Sean A un rectángulo de $\mathbb{R}^n$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que $f \geq 0$ sobre A y que $\int_A f = 0$. Probar que entonces $f = 0$.

11. Probar que si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es creciente (o decreciente) entonces es integrable en $[a, b]$.