# HOJA 10. PRÁCTICAS DE CÁLCULO INTEGRAL

GRUPO E+F, CURSO 2006-2007

Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar continua, y $\gamma : [a, b] \longrightarrow A$ un camino $C^1$ a trozos sobre su dominio. Se define la integral de $f$ sobre $\gamma$ por

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt.$$

Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, un campo vectorial continuo sobre la imagen de un camino $C^1$ a trozos $\gamma : [a, b] \longrightarrow A$ con longitud finita. Se define la integral de linea de $F$ sobre $\gamma$ por la fórmula

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt,$$

donde $F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ denota el producto escalar de $F(\gamma(t))$ con $\gamma'(t)$.

**Problema 1.** Hacer un dibujo de la traza de los siguientes caminos, y calcular su longitud:

(a) $\gamma(t) = (R \cos 2t, R \sin 2t)$, $0 \leq t \leq \pi$.
(b) $\gamma(t) = (R \cos t, -R \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
(c) $\gamma(t) = (R \cos t^2, R \sin t^2)$, $0 \leq t \leq \sqrt{2\pi}$.
(d) $\gamma(t) = (t^4, t^4)$, $-1 \leq t \leq 1$.
(e) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 4\pi$.
(f) $\gamma(t) = (R \cos 2t, R \sin 2t)$, $0 \leq t \leq \pi$.
(g) $\gamma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$, $0 \leq t < \infty$ (espiral logarítmica).
(h) $\gamma(t) = (t^3, t^2)$, $-2 \leq t \leq 2$.
(i) $\gamma(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$, $-4 \leq t \leq 4$.

**Problema 2.** Sean $\alpha$ y $\beta$ dos caminos que tienen la misma traza. Supongamos que ambos son inyectivos excepto en una cantidad finita de puntos. Probar que $\alpha$ y $\beta$ tienen la misma longitud.

**Problema 3.** Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^1$ a trozos. Probar que la longitud de la gráfica de $f$ sobre $[a, b]$ es

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

**Problema 4.** Definamos $\alpha : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\alpha(t) = \begin{cases} (-e^{-1/t^2}, e^{-1/t^2}) \quad \text{si } t < 0; \\ (0, 0) \quad \text{si } t = 0; \\ (e^{-1/t^2}, e^{-1/t^2}) \quad \text{si } t > 0, \end{cases}$$

y sea $\beta : [-e^{-1}, e^{-1}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\beta = (t, |t|)$. Probar que $\alpha$ y $\beta$ tienen la misma traza (a saber, un trozo de la gráfica de la función valor absoluto); sin embargo $\alpha$ es de clase $C^\infty$ en todo su dominio, mientras que $\beta$ no es diferenciable en el origen. No obstante, obsérvese que $\alpha'(0) = 0$; es decir, $\alpha$ debe detenerse en $t = 0$ para poder ser diferenciable en ese punto. Generalizar este hecho: probar que si $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ es un camino diferenciable y su traza coincide con la gráfica de una función $f$ cuyas derivadas laterales (no necesariamente finitas) son diferentes en un punto $x_0$ (y en particular la función no es derivable en ese punto), entonces $\alpha'(t) = 0$ para todos los $t$ tales que $x(t) = x_0$. Por otra parte, si sólo se supone que $f$ no es derivable en $x_0$, probar que al menos se tiene $x'(t) = 0$ para todo $t$ con $x(t) = x_0$.

**Problema 5.** Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un camino $C^1$ tal que $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t$. probar que $\|\gamma(t)\|$ es una constante no nula si y sólo si el vector velocidad $\gamma'(t)$ es ortogonal al vector posición $\gamma(t)$ para todo $t$.

**Problema 6.** Un camino $\alpha$ de clase $C^2$ tiene la propiedad de que su segunda derivada $\alpha''(t)$ es idénticamente cero. ¿Qué puede decirse sobre $\alpha$?

**Problema 7.** Sea $\gamma$ una curva en el plano cuya expresión en coordenadas polares viene dada por $\rho = \rho(\theta)$, con $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Demostrar que su longitud es

$$\ell(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta.$$

**Problema 8.** Calcular la longitud de la cardioide $\rho = a(1 + \cos\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

**Problema 9.** En los siguientes casos, calcular la integral de $f$ a lo largo de $\gamma$:

(a) $f(x, y) = 1 + y$; $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $0 \leq t \leq 3\pi/2$.
(b) $f(x, y, z) = xyz$; $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 3)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
(c) $f(x, y, z) = x + y + z$; $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

**Problema 10.** En los siguientes casos, calcular la integral del campo $F$ a lo largo de la curva $\gamma$:

(a) $F(x, y) = (-x^2y, xy^2)$; $\gamma(t) = (\sin t, \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
(b) $F(x, y, z) = (x, y, z)$; $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
(c) $f(x, y, z) = (y^2, x^2)$; $\gamma \equiv \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, y \geq 0\}$, recorrida en sentido positivo.

**Problema 11.** Calcular:

(a) $\int_\gamma ydx - xdy$; $\quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
(b) $\int_\gamma x^2dx + xydy$; $\quad \gamma$ es el cuadrado de vértices $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$, en sentido positivo.
(c) $\int_\gamma \sin zdx + \cos zdy - (xy)^{1/3}dz$; $\quad \gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, t)$, $0 \leq t \leq 7\pi/2$.
(d) $\int_\gamma ydx + (3y^2 - x)dy + zdz$; $\quad \gamma(t) = (t, t^n, 0)$, $0 \leq t \leq 1$; siendo $n \in \mathbb{N}$.
(e) $\int_\gamma 2xydx + (x^2 + z)dy + ydz$; $\quad \gamma$ es el segmento de $(1, 0, 2)$ a $(3, 4, 1)$.
(f) $\int_\gamma xydx + yzdy + xzdz$; $\quad \gamma \equiv \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, z = x, y \geq 0\}$.

**Problema 12.** Consideramos la fuerza $F(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcular el trabajo realizado al mover una particula sobre la parábola $y = x^2, z = 0$, desde $x = 1$ hasta $x = 2$.